第 14 卷第 4 期
1999 年 12 月

系 统 工 程 学 报
JOURNAL OF SYSTEMS ENGINEERING

Vol.14No . 4
Dec.1999

短 文

限制图上的局内出租车调度与竞争算法①

徐寅峰, 王刊良, 丁建华
(西安交通大学管理学院, 西安 710049)

摘要: 经典的优化理论大多是在已知条件不变的基础上给出最优方案(即最优解), 其最优性在条件发生变化时就会失去 局内问题与竞争算法则是针对特定的优化问题来研究这样的方法, 它在变化因素的每一个特例中都能给出一个方案, 使得这一方案所得到的解离最优方案给出的解总在一定的比例之内 本文应用复位策略给出限制图上局内 k 出租车调度问题竞争比为 $1+(n-k)\lambda$ 的竞争算法

关键词: 局内问题; 竞争算法; 竞争比
分类号: TB114.1 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000-5781(1999)04-0361-05

Scheduling for on-line taxi problem and competitive algorithm on constrained graphs

XU Yin-feng, WANG Kan-liang, DING Jian-hua
(Xi′an Jiaotong University, Xi′an 710049)

Abstract: Most traditional optimization theories produce the optimal solutions for problems at hand on the basis that the known conditions are unchanged, which may lost their optimality in most cases with conditions vary. The researches on on-line problem and competitive algorithm try to explore strategies which can produce solutions that is in a certain range proportional to the optimal solution for a given problem even in worst cases. A competitive algorithm is given for on-line scheduling of k-taxi problem on constrained graphs using the position maintaining occupied strategy, which has $1+(n-k)\lambda$ competitive ratio.

Keywords: on-line problem; competitive algorithm; competitive ratio; constrained graph

0 引 言

现实生活中的许多经济现象具有非常强的动态特征, 一切事物通常都是随着时间的推移而不断变化的 经典的优化理论大多是站在旁观者的立场上看问题, 即首先确定已知条件, 然后在假设这些已知条件不变的基础上给出最优方案(即最优解). 条件一旦发生变化, 这种方法所给出的最优方案就会失去其最优性 在变化的不确定因素对所考虑的问题影响很大时, 经典的优化方法有: 一是将可变化的因素随机化, 寻求平均意义上的最优方案; 二是考虑可变化因素的最坏情形, 寻求

① **收稿日期**:1998-10-30; **修订日期**:1999-03-06.
基金项目: 国家自然科学基金重点项目(19731001)和西安交通大学科研基金资助项目.
作者简介: 徐寅峰(1962-), 男(汉族), 吉林省吉林市人, 西安交通大学管理学院战略与决策研究所教授, 博士生导师

使最坏情形达到最优的方案 这两种处理方法对变化因素的一个特例都可能给出离实际最优解相距甚远的解,这显然是难以满足实际要求的 那么是否存在一种方法,它在变化因素的每一个特例中都能给出一个方案,使得这一方案所得到的解离最优方案给出的解总在一定的比例之内呢?近年来兴起的局内问题与竞争算法的研究结果在一定意义上给如上问题一个肯定的答案[1,2,3,4] .

出租车调度问题的实际背景是一个出租汽车公司如何调度出租车来完成顾客所提出的一个接一个的具体服务要求 对于一个出租汽车公司,假设它有 k 辆出租车在一个有限交通网络上进行载客服务,每个服务要求均由总调度台调度出租车来完成 考虑如下两个问题:(1) 事先给定一个要求服务的任务序列,如何调动出租车使得相关的费用最少?(2) 如果服务要求是在服务过程中一个个地接到的,这样每一时刻只能知道在此之前的任务序列与服务过程,那么如何调动出租车费用较少呢?出租车调度问题的优化目标是所有出租车所行驶的总里程数最少. 问题(1) 是个局外(off-line) 问题,而问题(2) 是一个局内(on-line)问题 两者的不同点在于可知的服务要求序列是全部还是局部 问题(1) 的最优解可以用动态规划方法来求得;而问题(2) 却难以处理 事实上,服务要求序列对调度方案有着致命的影响,随着服务要求出现的不同,最优调度方案也随之发生变化

局内出租车调度问题是局内 k 服务器问题的一个推广. 局内 k 服务器问题是近年来优化理论与竞争算法领域的一个热点研究项目 在国际上已有许多这方面的研究成果[1,2,3,4] ,国内这方面的研究展开的并不多,主要有堵丁柱教授的一篇介绍性文章及在局内 k 出租车调度问题上的初步结果[5,6] .

文献[6] 基于复位策略给出了 $k=n$ 和 $k=n-1$ 时竞争比为 2 的竞争算法,那么一般情形下的竞争算法和竞争比又如何呢?本文试图对该问题给出一个答案 文章首先建立局内 k 出租车调度问题的数学模型,在文献[6] 的基础上给出限制图情形下 k 出租车调度的竞争算法,并给出该算法对限制图上 k 出租车调度问题的竞争比 在结束语中提出了有待进一步深入研究的问题

1 数学模型

令 $G=(V,E)$ 为一边加权无向图,其中 V 为顶点集合且 $|V|=n$,E 为边集合,对于 $u,v,w\in V$,边之间的权满足三角不等式,即 $d(u,v)+d(v,w)\geq d(w,u)$,其中 $d(x,y)$ 表示顶点为 x,y 的边的权 假设有 k 辆出租车在顶点 V 的一个子集合上,一个服务要求 $r=(a,b)$,$a,b\in V$ (其实际意义为在顶点 a 有一顾客要求从顶点 a 乘出租车到顶点 b). 一个服务要求序列 R 由一些服务要求按先后顺序组成,即 $R=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$,其中 $r_i=(a_i,b_i)$,$a_i,b_i\in V$. 局内出租车问题是要求在每一个服务要求出现后就决定派哪一辆出租车来完成这一服务,而假设对后面可能出现的服务要求都一无所知

以下的所有讨论都基于如下基本假设:

i) 图 G 是连通的;

ii) 当新的服务要求出现时,k 辆出租车均处于闲置状态;

定义 1[6] 对于 $R=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$,令 $C_{opt}(R)$ 为已知服务要求序列 R 的情况下最优调度方案完成 R 中所有服务要求后,出租车所行驶的总里程数 如果调度方案 A 对于每一个新到来的服务要求 r_i 可以不依赖于 r_i 以后的服务要求序列来进行调度,那么称 A 为局内调度方案 对于局内调度方案 A,如果存在与服务要求序列 R 无关的常数 α 和 β 满足

$$C_A(R)\leq \alpha C_{opt}(R)+\beta$$

对任意可能出现的服务要求序列 r 都成立,则称 A 为竞争算法,α 为竞争比,其中 $C_A(R)$ 为完成服务要求序列 R 后,调度方案 A 的总费用(即出租车行驶的总里程数).

对于服务要求 $r_i=(a_i,b_i)$,调度一辆出租车到达 a_i 的过程称为空载;出租车由 a_i 到 b_i 的过程称为实载;若 $a_i=b_i$,则称服务要求 $r_i=(a_i,b_i)$ 为退化服务要求 若对所提出的服务要求序列 R 无限制,那么所对应的局内 k 出租车问题为 P;若假设对任一可能出现的服务要求 $r_i=(a_i,b_i)$ 都有 $d(a_i,b_i)>0$, 那么所对应的局内 k 出租车问题为 P1; 若假设对任一服务要求 $r_i=(a_i,b_i)$ 都有 $d(a_i,b_i)=0$, 即 $a_i=b_i$,那么它对应的 k 出租车问

题为 P2(此情形下, 所有的服务要求都是退化服务要求; 问题 P2 亦称为 k 服务器问题).

2　限制图上的竞争算法

2.1　k 服务器问题

k 服务器问题作为局内 k 出租车调度问题的一个特例是在 1990 年提出的[1]. 正是关于 k 服务器问题的许多具有启发性和构造性新结果的出现, 近年来在国际上关于局内问题与竞争算法的研究已成为最优化领域里一个越来越热的新方向. 由于下面局内 k 出租车调度问题的研究结果要揭示 k 服务器问题与一般 k 出租车问题之间的内在联系, 这里首先介绍一个关于 k 服务器问题, 即问题 P2 的一个研究结果, 其证明可参见文[1].

引理 1[1]　局内 k 服务器问题存在竞争比为 $2k-1$ 的竞争算法.

2.2　复位策略

复位策略[6]　对于当前服务要求 $r_i=(a_i, b_i)$, 当调度一辆出租车移到 a_i 后, 此出租车载客由 a_i 到 b_i 完成服务要求 r_i, 在下一个服务要求 r_{i+1} 到来之前, 先将在 b_i 的出租车移回 a_i, 然后再对 r_{i+1} 进行服务.

复位策略的根本思想是在任何服务请求到来之前始终保持系统处于一个稳定状态. 以上的复位策略可以使我们能够很好地对局内出租车问题与局内服务器问题进行比较研究. 先看如下引理.

引理 2[6]　令 $R=(r_1, r_2, \cdots, r_m)$ 为任一已知服务要求序列, $r_i=(a_i, b_i)$, $\sigma=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$, $C_{\rm opt}(R)$ 为完成局外服务要求 R 的最优费用, $C_{\rm opt}(\sigma)$ 为完成局外服务要求 σ 的最优费用, 其中 σ 为服务要求序列 $R((a_1, a_1), (a_2, a_2), \cdots, (a_m, a_m))$, 那么如下不等式成立:

$$C_{\rm opt}(R) \le C_{\rm opt}(\sigma) \qquad (*)$$

引理 3[6]　若图 G 上的局内 k 服务器问题存在 c 竞争算法, 那么 G 上的局内 k 出租车问题存在竞争比为 $c+2$ 的竞争算法.

上面两个引理的证明可参见文[6].

推论 1[6]　图 G 上的局内 k 出租车服务问题存在竞争比为 $2k+1$ 的竞争算法. 将对应于推论 1 的竞争算法记为算法 A1.

2.3　限定图情形分析

令 $d_{\max}=\max d(v_i, v_j)$, $d_{\min}=\min d(v_i, v_j)$, $i\ne j$, $v_i, v_j\in V$, 记

$$\lambda=\frac{d_{\max}}{d_{\min}}$$

显然 $1\le\lambda$. 如下讨论此限制图上问题 P1 的调度方案设计.

假设每个顶点均不会有超过一辆的出租车(若这 k 辆出租车的初始位置是某些顶点有超过一辆的出租车, 那么可以经过有限次移动使得每个顶点不会有超过一辆的出租车, 并且这样移动的总费用一定小于或等于常数 $(n-1)d_{\max}$, 这个常数对于竞争比的讨论没有影响[1].

对于服务要求序列 $R=(r_1, r_2, \cdots, r_m)$, 由于问题 P1 不存在 $a_i=b_i$ 的情形, 给出如下局内出租车服务问题的调度方案 A2, 对于当前的服务要求 $r_i=(a_i, b_i)$, $a_i\ne b_i$.

i) 当 a_i 位有出租车, b_i 位也有出租车时, a_i 位的出租车载乘客由 a_i 到 b_i, 同时 b_i 位的出租车移到 a_i; 此时完成 r_i 的费用为 $C=2d(a_i, b_i)$, 并且仍不存在出租车超过一辆的顶点; 记为 $a_i\to b_i\to a_i$;

ii) 当 a_i 位有出租车, b_i 位没有出租车时, a_i 位的出租车载乘客由 a_i 到 b_i; 此时完成 r_i 的费用为 $C=d(a_i, b_i)$, 并且仍不存在出租车超过一辆的顶点; 记为 $a_i\to b_i$;

iii) 当 a_i 位没有出租车, b_i 位有出租车时, 将 b_i 位的出租车移到 a_i, 然后载乘客由 a_i 到 b_i; 此时完成 r_i 的费用 $C=2d(a_i, b_i)$, 并且仍不存在出租车超过一辆的顶点; 记为 $b_i\to a_i\to b_i$;

iv) 当 a_i 位没有出租车, b_i 位也没有出租车时, 此时可调度离 a_i 最近的且有出租车的顶点(设为 c_i) 上的出租车到顶点 a_i, 然后载乘客从 a_i 到达 b_i; 记为 $c_i\to a_i\to b_i$; 此种情形下的费用为

$$C=d(c_i, a_i)+d(a_i, b_i).$$

定理 1　调度方案 A2 的竞争比为 $1+(n-k)\lambda$.

证明　对于任一服务要求序列 $R=(r_1, r_2, \cdots, r_m)$, 完成 R 的任何调度方案 A, 其费用 $C_A(R)$ 显然满足如下不等式:

$$C_A(R)\ge\sum_{i=1}^{m} d(a_i, b_i)$$

因为 $\sum_{i=1}^{m} d(a_i, b_i)$ 是出租车载客行驶的总里程数, 这是完成 R 所必需付出的费用.

对于方案A 2 的 i),ii),iii) 情形, 完成任一 r_i 的费用最多为最优费用(即 $d(a_i, b_i)$) 的 2 倍 而对情形 iv), 其附加费用为 $d(c_i, a_i)$. 由于 c_i 是距离 a_i 最近的有车的顶点, 那么从 c_i 到 a_i 的路径最多经过 $(n-k-1)$ 个没有车的顶点, 所以有 $d(c_i, a_i) \leq (n-k)d_{\max}$. 于是完成任一 r_i 的费用最多为最优费用(即 $d(a_i, b_i)$) 的 $1+(n-k)\lambda$ 倍 推导如下:

$$C_{A2}(R) \leq \sum_{i=1}^{m}\{\max[d(b_i, a_i), d(c_i, a_i)] + d(a_i, b_i)\} + \beta$$

其中 β 为在接受任务 r_1 之前使每个顶点均有不超过一辆出租车所需要的费用, 这一费用小于某个常数

由于 $a_i \neq b_i$, $d(a_i, b_i) > 0$, 则

$$\frac{C_{A2}(R)}{\sum_{i=1}^{m} d(a_i, b_i)} \leq 1 + \frac{\sum_{i=1}^{m}\max[d(b_i, a_i), d(c_i, a_i)]}{\sum_{i=1}^{m} d(a_i, b_i)}$$

由于 $d(c_i, a_i) \leq (n-k) \cdot d_{\max}$, $d(a_i, b_i) \geq d_{\min}$ 有

$$\frac{C_{A2}(R)}{\sum_{i=1}^{m} d(a_i, b_i)} \leq 1 + \frac{\sum_{i=1}^{m}(n-k) \cdot d_{\max}}{\sum_{i=1}^{m} d_{\min}} = 1 + (n-k) \cdot \frac{d_{\max}}{d_{\min}}$$

因 $\lambda = \frac{d_{\max}}{d_{\min}}$, $1 \leq \lambda$, 则

$$\frac{C_{A2}(R)}{\sum_{i=1}^{m} d(a_i, b_i)} \leq 1 + (n-k) \cdot \lambda$$

证毕

3 算法A 1 和A 2 的比较

在上一节给出了局内 k 出租车调度的两个算法A 1 和A 2, 其中A 1 对问题P 成立, 而A 2 仅对问题P1 成立, 考虑问题P1 时这两个算法孰优孰劣, 或者说在何种情况下哪个更优呢? 对此可作如下分析

局内算法优劣的标准是相应算法的竞争比, 算法A 1 和A 2 的竞争比分别为

$c_{A1} = 2k + 1$

$c_{A2} = 1 + (n-k)\lambda$

使 c_{A1} 和 c_{A2} 相等, 可以求出算法A 1 和A 2 的竞争比等价的 k 值:

$2k + 1 = 1 + (n-k)\lambda$

所以有

$$k = \frac{n\lambda}{2+\lambda}$$

显而易见, 可得出如下结论:

定理 2 对问题P1, 在算法竞争比方面, 当 $k < n\lambda/(2+\lambda)$ 时, 算法A 1 比算法A 2 优; 反之, 当 $k > n\lambda/(2+\lambda)$ 时, 算法A 2 比算法A 1 优

算法A 2 的竞争比与 λ 成正比, 所以就一般情形而言, 当 λ 比较小时, 算法A 2 的性能比较好; 而对算法A 1, 推论 1 所给出的竞争比对一般加权图成立, 对一些特殊结构的加权图, k 服务器问题可以给出具有较好竞争比的竞争算法[7].

4 结 束 语

本文所讨论的局内出租车调度问题的优化指标为出租车所走的总路程 对于文中所引入的问题P1 和P2 有许多有待进一步深入研究的理论问题及一些未解决的有关猜想[1,2,3,4] . 下述问题有待于深入探讨:

1) 对于局内出租车调度问题, 如果换一个角度来加以研究就更有实际意义 例如, 在考虑到顾客和出租车公司的实际需要时, 下面的优化指标具有非常重要的实际意义:i) 在服务要求序列具有一定的概率分布的情况下如何给出一个合理的调度方案;ii) 顾客最大等待时间最小的局内调度

方案; 即对每一个服务要求 $r_i = (a_i, b_i)$, 如何用合适的费用先调用一辆出租车到达 a_i.

2) 将本文所得出的结论应用到局内电梯调度问题上也是进一步值得研究的问题

3) 局内竞争调度方案的研究方法为研究许多实际中的局内问题提供了一新思路 如何将这一方法引入到对某些经济与管理问题的研究之中将是一个需要进一步深入展开的课题

参 考 文 献:

[1] Manasse M S, McGeoch L A, Sleator D D. Competitive algorithms for server problems [J]. Journal of Algorithms, 1990, (11):208～230

[2] Ben David S, Borodin A. A new measure for the study of the on-line algorithm [J]. Algorithmica, 1994, (11):73～91

[3] Koutsoupias E, Papadimitriou C. On the k-server conjecture [M]. STOC., 1994, 507～511

[4] Alon N, Karp R M, Peleg D, et al. A graph-theoretic game and its application to the k-server problem [J]. SIAM J. Comput., 1995, 24 (1):78～100

[5] 堵丁柱 k 车服务问题与竞争算法[J]. 数学的实践与认识, 1991, (4):36～40

[6] 徐寅峰, 王刊良 局内出租车调度与竞争算法[J]. 西安交通大学学报, 1997, (1):56～61

[7] Chrobak M, Larmore L L. An optimal on-line algorithm for k-servers on treees [J]. SIAM J. Comput., 1991, 20 (1):144～148

(上接第 355 页)

[3] Bruce L. Golden. An adaptive memory heuristic for a class of vehicle routing problems with minmax objectice [J]. Computers & Operations Research, 1997, 24 (5)

[4] Novuo Sannomiya, Kyoichi Tatemura. Application of genetic algorithm to a parallel path selection problem [J]. International Journal of Systems Science., 1996, (3)

[5] Chalam G A. Fuzzy goal programming (FGP) approach to a stochastic transportation problem under budgetary constraint [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 66:161～172

[6] Angelov P P. Optimization in an intuitionistic fuzzy environment [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 86:299～306

[7] Masatoshi Sakawa, Kosuke Kato. Interactive decision making for large-scale multi-objective linear programs with fuzzy numbers [J]. Fuzzy Sets, Systems, 1997, 88:161～172

[8] Rakesh Verma, Biswal M P, Biwas A. Fuzzy programming technique to solve multi-objective transportation problems with some non-linear membership functions [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 99:37～43

[9] Zimmermann H-J. Fuzzy programming and linear programming with sever objective functions [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1:45～55