第 31 卷 第 2 期　　航空计算技术　　2001 年 6 月

局内电梯调度问题与竞争算法

应柏安,徐寅峰,朱　云

(西安工程科技学院,陕西 西安 710048; 西安交通大学管理学院,陕西 西安 710049;
西北电业职工大学,陕西 西安 710054)

摘　要:经典的优化理论大多是在已知条件不变的基础上给出最优方案(即最优解),其最优性在条件发生变化时就会失去。局内问题与竞争算法则是针对特定的优化问题来研究这样的方法,它在变化因素的每一个特例中都能给出一个方案,使得这一方案所得到的解离最优方案给出的解总在一定的比例之内。本文首先提出了局内电梯调度问题,设计了解决该问题的两个不同的竞争算法,并证明了这两个竞争算法的竞争比分别为 $k+2$ 和 $n-k+1$,其中 k 为电梯的个数,n 为楼层数。

关键词:局内问题;竞争算法;竞争比

中图分类号: TB114.1

文献标识码:A

引言

现实生活中的许多经济现象通常都具有非常强的动态特征,一切事物通常都是随着时间的推移而不断变化的。经典的优化理论大多是站在旁观者的立场上看问题,即首先确定已知条件,然后在假设这些已知条件不变的基础上给出最优方案(即最优解)。条件一旦发生变化,这种方法所给出的最优方案就会失去其最优性。在变化的不确定因素对所考虑的问题影响很大时,经典的优化方法有:一是将可变化的因素随机化,寻求平均意义上的最优方案;二是考虑可变化因素的最坏情形,寻求使最坏情形达到最优的方案。这两种处理方法对变化因素的一个特例都可能给出离实际最优解相距甚远的解,这显然是难以满足实际要求的。那么是否存在一种方法,它在变化因素的每一个特例中都能给出一个方案,使得这一方案所得到的解离最优方案给出的解总在一定的比例之内呢?近年来兴起的局内问题与竞争算法的研究结果在一定意义上给如上问题一个肯定的答案[1-5]。

电梯调度问题的实际背景是一个高层建筑(宾馆或写字楼)在其入口处及各层之间通常有多部电梯来完成人们上下按所提出的一个接一个的具体服务要求。假设一共有 k 部电梯来完成这些服务;并且每个服务响应均由一个电梯控制器调度各部电梯来完成每个服务要求。考虑如下两个问题:1)事先给定一个要求服务的任务序列,如何调动电梯使得相关的费用最少?2)如果服务要求是在服务过程中一个个地接到的,这样每一时刻只能知道在此之前的任务序列与服务过程,那么如何调动电梯费用较少呢?电梯调度问题的优化目标是所有电梯所行驶的总长度最少(这个长度同费用成正比)。问题 1 是个局外(off-line)问题,而问题 2 是一个局内(on-line)问题。两者的不同点在于可知的服务要求序列是全部还是局部。问题 1 的最优解可以用动态规划方法来求得;而问题 2 却难以处理。事实上,服务要求序列对调度方案有着致命的影响,随着服务要求出现的不同,最优调度方案也随之发生变化。

局内电梯调度问题是局内 k 服务器问题的一个推广。局内 k 服务器问题是近年来优化理论与竞争算法领域的一个热点研究项目。在国际上已有许多这方面的研究成果[1-5],国内这方面的研究展开的并不多,主要有堵丁柱教授的一篇介绍性文章及在局内 k 出租车调度问题上的初步结果[6]。

本文首先建立局内 k 电梯调度问题的数学模型,给出了局内 k 服务器问题与局内 k 电梯调度问题的内在联系,同时给出了 k 电梯问题竞争算法与

收稿日期:2001-04-18
作者简介:应柏安(1962-　),男,讲师,主要研究方向为计算机应用及控制。

竞争比的几个结果。在结束语中提出了有待进一步深入研究的问题。

1 数学模型

假设有 k 部电梯在一个层数为 n 的建筑物内各楼层间进行服务,楼层序号集合为 V 。一个服务要求 $r = (a, b), a, b \in V$ (其实际意义为在楼层 a 有一顾客要求从楼层 a 乘电梯到楼层 b)。一个服务要求序列 R 由一些服务要求按先后顺序组成,即 $R = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$,其中 $r_i = (a_i, b_i), a_i, b_i \in V$。局内电梯问题是要求在每一个服务要求出现后就决定派哪一部电梯来完成这一服务,而假设对后面可能出现的服务要求都一无所知。

以下的所有讨论都基于如下基本假设;

i) 相邻楼层间的距离相等且为 1;

ii) 当新的服务要求出现时, k 部电梯均处于闲置状态;

对于 $R = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$,令 $C_{\text{opt}}(R)$ 为已知服务要求序列 R 的情况下最优调度方案完成 R 中所有服务要求后,电梯所行驶的总长度。如果调度方案 A 对于每一个新到来的服务要求 r_i 可以不依赖于 r_i 以后的服务要求序列来进行调度,那么称 A 为局内调度方案。对于局内调度方案 A, 如果存在与服务要求序列 R 无关的常数 α 和 β 满足

$$C_A(R) \leq \alpha C_{opt}(R) + \beta$$

对任意可能出现的服务要求序列 r 都成立,则称 A 为竞争算法,其中 $C_A(R)$ 为完成服务要求序列 R 后,调度方案 A 的总费用(即电梯行驶的总长度)。

对于服务要求 $r_i = (a_i, b_i)$,调度一部电梯到达 a_i 的过程称为空载;电梯由 a_i 到 b_i 的过程称为实载;若 $a_i = b_i$,则称服务要求 $r_i = (a_i, b_i)$ 为退化服务要求。若对所提出的服务要求序列 R 无限制,那么所对应的局内 k 电梯问题为 P; 若假设对任一可能出现的服务要求 $r_i = (a_i, b_i)$ 都有 $d(a_i, b_i) > 0$, 那么所对应的局内 k 电梯问题为 P1; 若假设对任一服务要求 $r_i = (a_i, b_i)$ 都有 $d(a_i, b_i) = 0$,即 $a_i = b_i$,那么它对应的 k 电梯问题为 P2 (此情形下,所有的服务要求都是退化服务要求;问题 P2 亦称为直线上的 k 服务器问题)。

2 竞争算法与竞争比的几个结果

2.1 k 服务器问题

直线上 k 服务器问题作为局内 k 电梯调度问题的一个特例已有很好的研究结果[5] 。正是关于 k 服务器问题的许多具有启发性和构造性新结果的出现,近年来在国际上关于局内问题与竞争算法的研究已成为最优化与算法领域里一个越来越热的新方向。由于下面局内 k 电梯调度问题的研究结果要揭示 k 服务器问题与一般 k 电梯问题之间的内在联系,这里首先介绍一个关于直线上 k 服务器问题,即问题 P2 的一个研究结果,其证明可参见[5] 。

引理 1[5] 直线上局内 k 服务器问题存在竞争比为 k 的竞争算法。

2.2 复位策略

复位策略:对于当前服务要求 $r_i = (a_i, b_i)$,当调度一部电梯移到 a_i 后,此电梯载客由 a_i 到 b_i 完成服务要求 r_i ,在下一个服务要求 r_{i+1} 到来之前,先将在 b_i 的电梯移回 a_i ,然后再对 r_i 进行服务。

复位策略的基本思想是在任何服务请求到来之前始终保持系统处于一个稳定状态。以上的复位策略可以使我们能够很好地对局内电梯问题与直线上的局内服务器问题进行比较研究。先看如下引理。

引理 2[7] 令 $R = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$ 为任一已知服务要求序列, $r_i = (a_i, b_i)$, $\sigma = (a_1, a_2, \cdots, am)$, $C_{\text{opt}}(R)$ 为完成局外服务要求 R 的最优费用, $C_{\text{opt}}(\sigma)$ 为完成局外服务要求 σ 的最优费用,其中 σ 为服务要求序列 $R = ((a_1, a_1), (a_2, a_2), \cdots, (a_m, a_m))$,那么如下不等式成立: $C_{\text{opt}}(R) \leq C_{\text{opt}}(\sigma)$ (*)

引理 3[7] 直线上的局内 k 服务器问题存在 c 竞争算法, 那么直线上的局内 k 电梯问题存在竞争比为 $c + 2$ 的竞争算法。上面两个引理的证明可参见[7], 由此可得出如下结论:

推论 4 局内 k 电梯调度问题存在竞争比为 $k + 2$ 的竞争算法。将对应于推论 4 的竞争算法记为算法 A_1 。

2.3 情形 $k = n - t, t > 0$

如下讨论 $k = n - t \ (n > t > 0)$ 时局内电梯调度问题 P1 的竞争算法设计。

假设每个楼层均不会有超过一部的电梯(若这 k 部电梯的初始位置是某些楼层有超过一部的电梯,那么可以经过有限次移动使得每个楼层不会有

超过一部的电梯,并且这样移动的总费用一定小于或等于常数$(n-1)$,这个常数对于竞争比的讨论没有影响[1]。

对于服务要求序列 $R=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$,由于问题 P_1 不存在 $a_i=b_i$ 的情形,给出如下局内电梯服务问题的调度方案 A_2,对于当前的服务要求 $r_i=(a_i,b_i)$,$a_i\neq b_i$。i)当 a_i 楼层有电梯,b_i 楼层也有电梯时,a_i 楼层的电梯载乘客由 a_i 到 b_i,同时 b_i 楼层的电梯移到 a_i;此时完成 r_i 的费用为 $C=2d(a_i,b_i)$,并且仍不存在电梯超过一部的楼层;记为 $a_i\to b_i\to a_i$;

ii)当 a_i 楼层有电梯,b_i 楼层没有电梯时,a_i 楼层的电梯载乘客由 a_i 到 b_i;此时完成 r_i 的费用为 $C=d(a_i,b_i)$,并且仍不存在电梯超过一部的楼层;记为 $a_i\to b_i$;

iii)当 a_i 楼层没有电梯,b_i 楼层有电梯时,将 b_i 楼层的电梯移到 a_i,然后载乘客由 a_i 到 b_i;此时完成 r_i 的费用 $C=2d(a_i,b_i)$,并且仍不存在电梯超过一部的楼层;记为 $b_i\to a_i\to b_i$;

iv)当 a_i 楼层没有出租,b_i 楼层也没有电梯时,此时可调度离 a_i 最近的且有电梯的楼层(设为 c_i)上的电梯到楼层 a_i,然后载乘客从 a_i 到达 b_i;记为 $c_i\to a_i\to b_i$;此种情形下的费用为 $C=d(c_i,a_i)+d(a_i,b_i)$。

定理 5 调度方案 A_2 的竞争比为 $1+(n-k)$。

证明:对于任一服务要求序列 $R=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$,完成 R 的任何调度方 A, 其费用 $C_A(R)$ 显然满足如下不等式:

$$C_A(R)\geq\sum_{i=1}^{m}d(a_i,b_i)$$

因为 $\sum_{i=1}^{m}d(a_i,b_i)$ 是电梯载客行驶的总长度,这是完成 R 所必需付出的费用。

对于方案 A_2 的 i),ii),iii)情形,完成任一 r_i 的费用最多为最优费用(即 $d(a_i,b_i)$)的 2 倍。而对情形 iv),其附加费用为 $d(c_i,a_i)$。由于 c_i 是距离 a_i 最近的有车的顶点,那么从 c_i 到 a_i 的路径最多经过$(n-k-1)$个没有车的顶点,所以有 $d(c_i,a_i)\leq n-k$。于是完成任一 r_i 的费用最多为最优费用即$(d(a_i,b_i))$的 $1+(n-k)$ 倍。推导如下:

$$C_{A2}(R)\leq\sum_{i=1}^{m}\{max[d(b_i,a_i),d(c_i,a_i)]+d(a_i,b_i)\}+\beta$$

其中 β 为在接受任务 r_1 之前使每个顶点均有不超过一部电梯所需要的费用,这一费用小于某个常数。由于 $a_i\neq b_i$,$d(a_i,b_i)\geq 1$,

则

$$\frac{C_{A2}(R)}{\sum_{j=1}^{m}d(a_i,b_i)}\leq 1+\frac{\sum_{j=1}^{m}max[d(b_i,a_i),d(c_i,a_i)]}{\sum_{j=1}^{m}d(a_i,b_i)},$$

由于 $d(c_i,a_i)\leq(n-k)$,$d(a_i,b_i)\geq 1$,我们有

$$\frac{C_{A2}(R)}{\sum_{j=1}^{m}d(a_i,b_i)}\leq 1+\frac{\sum_{j=1}^{m}d(n-k)}{\sum_{j=1}^{m}}=1+(n-k),$$

则 $C_{A2}(R)\leq[1+(n-k)]\cdot\sum_{j=1}^{m}d(a_i,b_i)$ 证毕。

3 算法 A_1 和 A_2 的比较

在上一节我们给出了局内 k 出租车调度的两个算法 A1 和 A2, 其中 A1 对问题 P 成立,而 A2 仅对问题 P1 成立,考虑问题 P1 时这两个算法孰优孰劣,或者说在何种情况下哪个更优呢?对此我们可作如下分析。

局内算法优劣的标准是相应算法的竞争比,算法 A1 和 A2 的竞争比分别为

$$c_{A1}=k+2$$

$$c_{A2}=1+(n-k)$$

使 c_{A1} 和 c_{A2} 相等,可以求出算法 A1 和 A2 的竞争比等价的 k 值:

$$k+2=1+(n-k)$$

所以有,　$k=\frac{n-1}{2}$

显而易见,我们可得出如下结论:

定理 6　对问题 P1, 在算法竞争比方面,当 $k<(n-1)/2$ 时,算法 A1 比算法 A2 优;反之,当 $k>(n-1)/2$ 时,算法 A2 比算法 A1 优。

4 结束语

本文所讨论的局内电梯调度问题的优化指标为电梯所走的总路程。对于文中所引入的问题 P1 和 P2 有许多有待进一步深入研究的理论问题及一些未解决的有关猜想[1-4]。下述问题有待于深入探讨:

a. 对于局内电梯调度问题,如果换一个角度来

加以研究就更有实际意义。例如在考虑到乘客的实际需要时,下面的优化指标具有非常重要的实际意义:i) 在服务要求序列具有一定的概率分布的情况下如何给出一个合理的调度方案;ii) 顾客最大等待时间最小的局内调度方案;即对每一个服务要求 $r_i = (a_i, b_i)$,如何用合适的费用先调用一辆电梯到达 a_i。

b. 在许多实际的电梯调度问题中,一个新的服务要求通常仅给出在某一楼层有人要求乘电梯,而要求电梯到何楼层去仅当在电梯控制器完成该请求之后才能知道,这与本文所研究的每个请求有所不同,那么在这种情况下,如何设计有效的竞争算法?

c. 局内竞争调度方案的研究方法为研究许多实际中的局内问题提供了一新思路。如何将这一方法引入到对某些经济与管理问题的研究之中将是一个需要进一步深入展开的课题。

[参考文献]

[1] M.S.Manasse,L.A.McGeoch,andD.D.Sleator,Competitivealgorithmsforserver problems[J].JournalofAlgorithms,1990(11),208-230.

[2] S.BenDavidandA.Borodin,Anewmeasureforthe studyoftheon-linealgorithm[J].Algorithmica,1994(11),73-91.

[3] E.Koutsoupias,C.Papadimitriou,Onthek-serverconjecture[J].STOC.,507-511,1994.

[4] N.Alon,R.M.Karp,D.Peleg,etal,A graph-theoretic gameanditsapplicationtothek-server problem[J]. SIAMJ.Comput.,1995,24(1):78-100.

[5] 堵丁柱.k 车服务问题与竞争算法[J]. 数学的实践与认识,1991(4):36-40.

[6] 徐寅峰,王刊良. 局内出租车调度与竞争算法[J]. 西安交通大学学报,1997(1):56-61.

[7] M.ChrobakandL.L.Larmore,AnOptimalon-linealgorithmfork-serversontrees[J].SIAMJ.Comput., 1991,20(1):144-148.

SchedulingforOn-lineElevatorProblemandCompetitiveAlgorithm

YINGBai-an,XUYin-feng,ZHU yun

(Xi'an Institute Science and Technology, Xi'an 710048, China; Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; Northwest Electricity Power Staff University, Xi'an 710054, China)

Abstract:Mosttraditionaloptimizationtheories producetheoptimalsolutionsfor problemsat handonthebasisthattheknownconditionsareunchanged,whichmaylosttheiroptimalityin mostcaseswithconditionsvary.Theresearchesonon-line problemandcompetitivealgorithm trytoexplorestrategieswhichcan producesolutionsthatisinacertainrange proportionaltothe optimalsolutionfora given problemeveninworstcases.This paper givestwocompetitivealgorithmsforon-lineschedulingof k elevator problemusingthe positionmaintainingoccupiedstrategy,whichhave $k+2$ and $n-k+1$ competitiveratiosrespectively,where k isthenumberofelevatorsand n isthenumberoffloorsofaconstruction.

Keywords: on-line problem;competitivealgorithm;competitiveratio;constrained graph