第31卷 增刊Ⅰ 1997年6月
西安交通大学学报
JOURNAL OF XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY
Vol. 31 Sup. Ⅰ Jun. 1997

局内出租车调度与竞争算法

徐寅峰 王刊良
(西安交通大学, 710049, 西安)

摘要 应用复位策略给出了局内 k 出租车调度问题的竞争算法. 给出了当 $k=n$ 和当 $k=n-1$ 时竞争比为2的竞争算法.

关键词 局内问题 竞争算法 竞争比
中国图书资料分类法分类号 TB114.1

现实生活中的许多经济现象通常都具有非常强的动态特征, 人们对于这些现象一般是先进行数学上的抽象, 然后用静态或统计的方法来加以研究和处理. 从优化的理论和方法上看, 经典的优化理论大多是站在旁观者的立场上看问题. 即首先确定已知条件, 然后在假设这些已知条件不变的基础上给出最优方案(即最优解). 条件一旦发生变化, 这种方法所给出的最优方案就会失去其最优性. 现实世界中的一切事物通常都是随着时间的推移而不断变化的. 如果这种可变化的不确定因素对所考虑的问题影响很大, 那么将如何给出优化呢? 对于可变化的因素, 数学上有两种经典的方法来进行处理: 一是将可变化的因素随机化, 寻求平均意义上的最优方案; 二是考虑可变化因素的最坏情形, 寻求使最坏情形达到最优的方案. 这两种处理方法对变化因素的一个特例都可能给出离实际最优解相距甚远的解, 这显然是难以满足实际要求的. 那么是否存在一种方法, 它在变化因素的每一个特例中都能给出一个方案, 使得这一方案所得到的解离最优方案给出的解总在一定的比例之内呢? 近年来兴起的局内问题与竞争算法的研究结果, 在一定意义上给如上问题一个肯定的答案, 参见文献[1～4].

出租车调度问题的实际背景是一个出租汽车公司如何调度出租车来完成顾客所提出的一个接一个的具体服务要求. 对于一个出租汽车公司, 假设它有 k 辆出租车在一个有限交通网络上进行载客服务, 每个服务要求均由总调度台调度出租车来完成. 考虑如下两个问题: (1) 事先给定一个要求服务的任务序列, 如何调动出租车, 使得相关的费用最少? (2) 如果服务要求是在服务过程中一个个地接到的, 这样, 每一时刻只能知道在此之前的任务序列与服务过程, 那么如何调动出租车使费用较少呢?

出租车调度问题的优化目标是所有出租车所行驶的总里程数最少(因为出租车行驶的总

收到日期: 1997-02-25. 徐寅峰: 男, 1962年9月生, 管理学院战略与决策研究所, 副教授.
* 西安交通大学科研基金资助课题

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

里程数与出租车公司的费用成正比, 在完成一个服务要求序列之后, 费用越少越好). 问题(1)是个局外问题, 而问题(2)是一个局内问题 两者的不同点在于可知的服务要求序列是全部还是局部 问题(1)的最优解可以用动态规划方法来求得, 而问题(2)却难以处理 事实上, 服务要求序列对调度方案有着致命的影响, 随着服务要求出现的不同, 最优调度方案也随之发生变化

局内出租车调度问题是局内 k 服务器问题的一个推广. 局内 k 服务器问题是近年来优化理论与竞争算法领域的一个热点研究项目. 在国际上已有许多这方面的研究成果[1~3]. 国内这方面的研究开展得不多, 主要有堵丁柱教授的一篇介绍性文章[5].

本文首先建立局内 k 出租车调度问题的数学模型, 给出了 k 服务器问题与 k 出租车问题之间的内在联系, 同时给出了 k 出租车问题竞争比的几个结果 在结束语中提出了几个有待进一步深入研究的问题

1 数学模型

令 $G=(V, E)$ 为一边加权无向图, 其中 V 为顶点集合, E 为边集合, 对于 $u, v, w\in V$, 边之间的权满足三角不等式, 即 $d(u, v)+d(v, w)\geq d(w, u)$, 其中 $d(x, y)$ 表示顶点为 x, y 的边的权 假设有 k 辆出租车在顶点 V 的一个子集合上, 一个服务要求 $r=(a, b)$, $a, b\in V$ (其实际意义为在顶点 a 有一顾客要求从 a 乘出租车到 b 顶点). 一个服务要求序列 R 由一些服务要求按先后顺序组成, 即 $R=(r_1, r_2, \cdots, r_m)$, 其中 $r_i=(a_i, b_i)$, $a_i, b_i\in V$. 局内出租车问题是要求在每一个服务要求出现后决定派哪一辆出租车来完成这一服务, 而假设对后面可能出现的服务要求都一无所知

以下的所有讨论都基于如下基本假设:

i) 图 G 是连通的;

ii) 当新的服务要求出现时, k 辆出租车均处于闲置状态

对于 $R=(r_1, r_2, \cdots, r_m)$, 令 $C_{opt}(R)$ 为已知服务要求序列 R 情况下最优调度方案完成 R 中所有服务要求后, 出租车所行驶的总里程数 如果调度方案 A 对于每一个新到来的服务要求 r_i 可以不依赖于 r_i 以后的服务要求序列来进行调度, 那么称 A 为局内调度方案 对于局内调度方案 A, 如果存在与服务要求序列 R 无关的常数 α 和 β 满足

$$C_A(R)\leq \alpha C_{opt}(R)+\beta$$

对任意可能出现的服务要求序列 R 都成立, 则称 A 为竞争算法, 其中 $C_A(R)$ 为完成服务要求序列 R 后, 调度方案 A 的总费用(即出租车行驶的总里程数).

对于服务要求 $r_i=(a_i, b_i)$, 调度一辆出租车到达 a_i 的过程称为空载; 出租车由 a_i 到 b_i 的过程称为实载; 若 $a_i=b_i$, 则称服务要求 $r_i=(a_i, b_i)$ 为退化服务要求 若对所提出的服务要求序列 R 无限制, 那么所对应的局内 k 出租车问题为 P; 假设对任一可能出现的服务要求 $r_i=(a_i, b_i)$ 都有 $d(a_i, b_i)>0$, 那么所对应的局内 k 出租车问题为 P_1; 假设对任一服务要求 $r_i=(a_i, b_i)$ 都有 $d(a_i, b_i)=0$, 即 $a_i=b_i$, 那么它对应的 k 出租车问题为 P_2(此情形下, 所有的服务要求都是退化服务要求, 问题 P_2 亦称为 k 服务器问题).

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2 竞争比的几个结果

2 1 k 服务器问题

k 服务器问题作为局内 k 出租车调度问题的一个特例是在1990年提出的(参见文献[1]). 正是关于 k 服务器问题的许多具有启发性和构造性新结果的出现, 近年来在国际上关于局内问题与竞争算法的研究已成为最优化领域里一个越来越热的新方向 由于下面局内 k 出租车调度问题的研究结果要揭示 k 服务器问题与一般 k 出租车问题之间的内在联系, 这里首先介绍一个关于 k 服务器问题, 即问题 P_2 的一个研究结果, 其证明可参见文献[1].

引理1[1] 局内 k 服务器问题存在竞争比为 $2k-1$ 的竞争算法

2 2 复位策略

复位策略: 对于当前服务要求 $r_i=(a_i, b_i)$, 当调度一辆出租车移到 a_i 后, 此出租车载客由 a_i 到 b_i 完成服务要求 r_i, 在下一个服务要求 r_{i+1} 到来之前, 先将在 b_i 的出租车移回 a_i, 然后再对 r_{i+1} 进行服务.

以上的复位策略可以使我们能够很好地对局内出租车问题与局内服务器问题进行比较研究 先看如下引理

引理2 令 $R=(r_1, r_2, \cdots, r_m)$ 为任一已知服务要求序列, $r_i=(a_i, b_i)$, $\sigma=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$, $C_{\mathrm{opt}}(R)$ 为完成局外服务要求 R 的最优费用, $C_{\mathrm{opt}}(\sigma)$ 为完成局外服务要求 σ 的最优费用, 其中 σ 为服务要求序列 $R=((a_1, a_1), (a_2, a_2), \cdots, (a_m, a_m))$, 那么以下不等式成立

$$C_{\mathrm{opt}}(\sigma) \leq C_{\mathrm{opt}}(R) \qquad (*)$$

证明 由于完成 R 的任何调度方案同样完成了服务要求序列 σ, 所以(*)式成立

证毕

结合复位策略和引理2, 以下结论成立:

定理3 若图 G 上的局内 k 服务器问题存在 C 竞争算法, 那么 G 上的局内 k 出租车问题存在竞争比为 $C+2$ 的竞争算法

证明 对任一服务要求序列 $R=(r_1, r_2, \cdots, r_m)$, $r_i=(a_i, b_i)$. 考虑 k 服务器问题的服务要求序列 $\sigma=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$, 令 A_σ 为图 G 上局内 k 服务器问题的一个 C 竞争算法 我们设计对应于 k 出租车的局内算法 A 如下:

对于当前服务要求 $r_i=(a_i, b_i)$, 首先利用算法 A_σ 来满足服务要求 a_i(即调动一辆出租车到达 a_i), 然后应用复位策略来完成 r_i(即完成服务要求 r_i 后, 在 a_i 处仍有一辆出租车).

以下将证明局内算法 A 是竞争比 $C+2$ 的竞争算法 由于

$$C_A(R) = \sum_{i=1}^{m} C_A(r_i) = \sum_{i=1}^{m} [C_{A_\sigma}(a_i) + 2d(a_i, b_i)] =$$

$$C_{A_\sigma}(\sigma) + 2\sum_{i=1}^{m} d(a_i, b_i) \leq C \cdot C_{\mathrm{opt}}(\sigma) + 2\sum_{i=1}^{m} d(a_i, b_i) + \beta$$

式中 C、β 为与服务要求序列 R 及算法 A 无关的常数

由引理2以及 $\sum_{i=1}^{m} d(a_i, b_i) \leq C_{\mathrm{opt}}(R)$, 有

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$C_A(R) \leq C \cdot C_{opt}(R) + 2C_{opt}(R) + \beta = (C+2)C_{opt}(R) + \beta$$

证毕

由引理1与定理3, 下列推论成立:

推论4 图 G 上的局内 k 出租车服务问题存在竞争比为 $2k+1$ 的竞争算法

2.3 限定情形分析

下面讨论当出租车个数 k 与图 G 的顶点个数 n 相等时问题 P 和 $k=n-1$ 时问题 P_1 的调度方案设计.

2.3.1 $|V|=n$、$k=n$, 即有 n 辆出租车服务于 n 个顶点的网络上

此时可假设每个顶点均有一辆出租车. 若这 n 辆出租车的初始位置不是每个顶点都有一辆出租车, 那么可以经过有限次移动使得每个顶点只有一辆出租车, 并且这样移动的总费用一定小于或等于常数 $(n-1)d$, 其中 $n=\max_{x,y\in V} d(x,y)$, 这个常数对于竞争比的讨论没有影响[1].

对于服务要求序列 $R=(r_1, r_2, \cdots, r_m)$, 类似于复位策略, 我们给出如下局内出租车服务问题的调度方案 A_1, 对于当前服务要求 $r_i=(a_i, b_i)$.

i) 当 $a_i=b_i$ 时, 所有出租车原位不动, 由于此时 a_i 处已有出租车, 所以完成服务要求 r_i 的费用为0.

ii) 当 $a_i\neq b_i$ 时, 由于 a_i、b_i 处都有出租车, 让 a_i 位的出租车载乘客从 a_i 到达 b_i, 同时 b_i 位的出租车从 b_i 位移到 a_i. 这样既完成了服务要求 r_i, 同时在每个顶点仍有一辆出租车, 完成 r_i 的费用为 $2d(a_i, b_i)$.

定理5 调度方案 A_1 的竞争比为2

证明 对于任一服务要求序列 $R=(r_1, r_2, \cdots, r_m)$, 完成 R 的任何调度方案 A, 其费用 $C_A(R)$ 显然满足下列不等式

$$C_A(R) \geq \sum_{i=1}^{m} d(a_i, b_i)$$

因为 $\sum_{i=1}^{m} d(a_i, b_i)$ 是出租车载客行驶的总里程数, 这是完成 R 所必需付出的费用.

对于方案 A_1,

$$C_{A_1}(R) = 2\sum_{i=1}^{m} d(a_i, b_i) + \beta \leq 2C_{opt}(R) + \beta$$

式中: β 为在接受任务 r_1 之前使每个顶点均有一辆出租车所需要的费用, 这一费用小于某个常数

证毕

2.3.2 $|V|=n$、$k=n-1$, 即有 $n-1$ 辆出租车服务于 n 个顶点的网络上

与2.3.1节类似的讨论, 我们可以在付出有限的费用后使得仅有一个顶点没有出租车, 在此前提下讨论问题 P_1 的局内调度方案

对于服务要求序列 $R=(r_1, r_2, \cdots, r_m)$, 由于问题 P_1 不存在 $a_i=b_i$ 的情形, 给出如下局内出租车服务问题的调度方案 A_2, 对于当前服务要求 $r_i=(a_i, b_i)$, $a_i\neq b_i$.

i) 当 a_i 位有出租车、b_i 位也有出租车时, a_i 位的出租车载客由 a_i 到 b_i, 同时 b_i 位的出租车移到 a_i, 此时完成 r_i 的费用为 $2d(a_i, b_i)$, 并且仍仅有一个顶点没有出租车

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

ii) 当 a_i 位有出租车、b_i 位没有出租车时, a_i 位的出租车载乘客由 a_i 到 b_i, 此时完成 r_i 的费用为 $d(a_i, b_i)$, 并且仍仅有一个顶点没有出租车.

iii) 当 a_i 位没有出租车时, 由于 $a_i \neq b_i$, 所以 b_i 位一定有出租车, 将 b_i 位的出租车移到 a_i, 然后载乘客由 a_i 到 b_i, 此时完成 r_i 的费用为 $2d(a_i, b_i)$, 并且仍有一个顶点没有出租车.

定理6 局内调度方案 A_2 的竞争比为2.

证明 类似于定理5的讨论有

$$C_{\mathrm{opt}}(R) \geq \sum_{i=1}^{m} d(a_i, b_i)$$

并且

$$C_{A_2}(R) = \sum_{i=1}^{m} C_{A_2}(r_i) + \beta \leq 2\sum_{i=1}^{m} d(a_i, b_i) + \beta \leq 2C_{\mathrm{opt}}(R) + \beta$$

式中 β 为在接受任务 r_1 之前使得仅有一个顶点没有出租车所需要的移动费用.

证毕

对于2.3.2节的情形, 限定 $d(a_i, b_i) > 0$ $(i=1, \cdots, m)$ 是十分必要的. 如果去掉此限制, 则定理6的结论不成立. 如果 $d(a_i, b_i)=0$, $i=1, \cdots, m$, 此时 k 出租车问题退化为 k 服务器问题. 在文献[1]中证明了当 $k=n-1$ 时, 局内 k 服务器问题不存在竞争比小于 $n-1$ 的竞争算法.

3 结束语

本文所讨论的局内出租车调度问题的优化指标为出租车所走的总路程. 对于文中所引入的问题 P_1 和 P_2, 有许多有待进一步深入研究的理论问题. 例如, 对于问题 P_1, 本文第2节中仅给出当 $k=n$、$k=n-1$ 时的调度方案, 而对一般情形 k 的讨论还需深入地加以研究. 对问题 P_2, 近年来国际上有许多新结果及一些未解决的有关猜想(参见文献[1～4]).

对于局内出租车调度问题, 如果换一个角度来加以研究就更有实际意义. 例如, 在考虑到顾客和出租车公司的实际需要时, 下面的优化指标具有非常重要的实际意义:

i) 在服务要求序列具有一定的概率分布的情况下, 如何给出一个合理的调度方案;

ii) 顾客的最大等待时间最小的局内调度方案, 即对每一个服务要求 $r_i=(a_i, b_i)$, 如何用合适的费用先调用一辆出租车到达 a_i.

局内竞争调度方案的研究方法给我们研究许多实际的局内问题提供了一新思路. 如何将这一方法引入到对某些经济与管理问题的研究之中, 将是一个需要进一步深入展开的课题.

参考文献

1 Manasse M S, McGeoch L A, Sleator D D. Competitive algorithms for server problems. Journal of Algorithms, 1990, (11): 208～230

2 David S, Borodin A. A new measure for the study of the on-line algorithm. Algorithmica, 1994, (11): 73～91

3 Koutsoupias E, Papadimitriou C. On the k-server conjecture. In: Proc of STOC. Montreal, 1994. 507～511

4 Alon N, Karp R M, Peleg D, et al. A graph-theoretic game and its application to the k-server problem.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

SIAM J Comput, 1995, 24(1): 78～100
5 堵丁柱 k 车服务问题与竞争算法 数学的实践与认识, 1991, (4): 36～40

(编辑 蒋慧姝)

Scheduling for On-Line Taxi Problem and Competitive Algorithms

Xu Yinfeng Wang Kanliang
(Xi'an Jiaotong University, 710049, Xi'an)

Abstract Competitive algorithms are given for on-line scheduling of k-taxi problem using the position maintaining occupied strategy. Competitive algorthms with competitive ratio 2 for $k=n$ and $k=n-1$ are presented.

Keywords *on-line problem competitive algorithm competitive ratio*

(上接第55页)

Optimal Decision Analysis of Business Scope of Enterprise

Zhang Renhua Xi Youmin
(Xi'an Jiaotong University, 710049, Xi'an)

Abstract A productivity vector is introduced to describe production system. An optimal decision model of product scope of enterprise under demand contraints is set up. The comparative statics analysis of this model shows that decrease in transfer cost, time or asset specificity can make an enterprise manufacture more variety and lower volume economically.

Keywords *business scope productivity vector dicision model*

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net