# 局内车辆选线问题和竞争策略分析①

朱志军 , 徐寅峰 , 刘春草
(西安交通大学管理学院 , 西安 710049)

**摘要**:将现实物流配送中所遇到的问题抽象为一个局内车辆选线问题 ,考虑堵塞点动态产生、一个个遇到的情况下的车辆调度方案. 经典的优化理论大多是在已知条件不变的基础上给出最优方案(即最优解) ,在条件发生变化时就会失去其最优性. 而论文所考虑的竞争算法能使得调度方案对于变化因素的每一个特例得到的解离最优方案给出的解总在一定范围之内. 不仅设计了解决局内车辆选线问题的竞争算法:贪婪策略和复位策略 ,分析了不同情况下算法各自的竞争比 ,而且给出了此问题的竞争比下界.

**关键词**:局内问题; 竞争算法; 竞争比; 贪婪策略; 复位策略
**中图分类号**:TB114. 1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000 - 5781(2003)04 - 0324 - 07

# Scheduling for on-line routing problem and its competitive strategy analysis

ZHU Zhi-jun , XU Yin-feng , LIU Chun-cao
(School of Management , Xi ’an Jiaotong University , Xi ’an 710049 , China)

**Abstract** :The paper abstracts the concrete problem in logistics to an on-line problem. The solution for routing is considered when the congested vertex is met one by one. Most traditional optimization theories produce the optimal solutions for problems at hand on the basis that the known conditions are unchanged , which may lose their optimality in most cases when conditions vary. The researches on on-line problem and competitive algorithm try to explore strategies which can produce solutions that is in a certain range proportional to the optimal solution for a given problem even in worst cases. This paper gives the greedy strategy and the reposition strategy for on-line scheduling of shortest path problem , analyzing their competitive ratios in different situations. Finally , the lower bound of the problem is discussed.

**Key words** : on-line problem ; competitive algorithm ; competitive ratio ; greedy strategy ; reposition strategy

## 0 引 言

现实生活中的许多经济现象通常都具有非常强的动态特征 ,人们对于这些现象一般是先进行数学上的抽象 ,然后用静态或统计的方法加以研究和处理. 从优化的理论和方法上看 ,经典的优化理论大多是站在旁观者的立场上看问题 ,即首先确定已知条件 ,然后在假设这些已知条件不变的基础上给出最优方案(即最优解) . 条件一旦发生变化 ,这种方法所给出的最优方案就会失去其最优性. 在变化的不确定因素对所考虑的问题影响很大的时候 ,经典的优化方法有:一是将可变化的因素随机化 ,寻求平均意义上的最优方案 ,二是考虑可变化因素的最坏情形 ,寻求最坏情形达到最

① 收稿日期:2002 - 01 - 14; 修订日期:2003 - 04 - 18.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(19731001) .

优的方案.这两种处理方法对变化因素的一个特例都可能给出离实际最优解相距甚远的解,这显然难以满足实际的要求.那么是否存在一种方法,它在变化因素的每一个特例中都能给出一个方案,使得这一方案所得到的解离最优方案给出的解总在一定的比例之内呢?近年来兴起的局内问题与竞争算法的研究结果在一定意义上给如上问题一个肯定的答案[1~4].

本文所考虑问题的实际背景是一个物流配送公司对其运输车辆的调度.假设物流公司需要用货车把货物从初始点 $O$ (origin) 运送到目的点 $D$ (destination).如果将十字路口及路口间的街道抽象成图上的点和边,同时各个路口之间的距离对应于相应边的权重.从日常来看,物流公司完全可以通过将整个城市交通网络看成一个网络图来进行运算,找到一条从 $O$ 到 $D$ 的最短路径以减少运输费用和节省运输时间[5].然而这条路径并非完全可靠,因为有些点可能发生堵塞而不能通过(如塞车).现考虑如下两个问题:1) 事先给定一个堵塞点序列 $R=(r_1, r_2, \cdots, r_k)$,如何调动运输车来使得相关费用最少.2) 如果当运输车辆只是在运行的过程中走到 $A$ 点,才能发现前方路径上相邻的 $B$ 点发生拥塞不能通过,车辆必须改道行驶,也就是说堵塞点的信息是一个个地得到.在每一时刻只能知道在此之前的堵塞点的信息,那么该如何调动运输车辆使费用最少呢?

局内车辆选线问题的优化目标是使得运输车辆所行驶的总里程数最少(因为运输车行驶的总里程数与物流配送公司的费用成正比,完成一个运输任务的费用越少越好).问题 1) 是个局外问题,而问题 2) 则是一个局内问题.两者的不同在于可知的堵塞点序列是全部还是局部.问题 1) 的最优解可以很方便地用经典的最短路的数学模型求出,而问题 2) 却难以处理.事实上,堵塞点序列对调度方案有着致命的影响,随着堵塞点出现的不同,最优调度方案也会随之发生变化[6,7].

本文首先建立了物流配送公司局内最短路问题的数学模型,介绍了解决此局内问题的贪婪策略和复位策略竞争算法,给出了竞争算法在堵塞点为单个点和一个序列 $R=(r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 两种情况下各自的竞争比.最后,讨论并给出了此问题的最低竞争比下界为 $2k+1$.

## 1　数学模型

假设城市交通网络是一个网络图,记为 $G$,交通路口对应于图 $G$ 上的各个顶点,令 $G=(V, E)$ 为一加权无向图,其中 $V$ 为顶点的集合,$E$ 为边的集合,$|V|=n$,对于 $u, v, w \in V$,边的权重满足三角不等式,即 $w_{uv}+w_{vw} \geq w_{uw}$,$w_{ij}$ 表示从 $i$ 点到 $j$ 点边的权重,其中 $O$ 表示运输的初始点,$D$ 表示运输的目的点.SP 表示在没有路口堵塞情况下的最短路径,$W$ (SP) 表示沿着最短路径所要花费的运输费用.

以下的讨论都是基于如下的基本假设:

1) 去掉堵塞点后图 $G$ 仍是连通的;

2) 只有当运输车走到前一点后,才能发现后面的一点发生堵塞而不能通过;

3) 堵塞点一旦产生,这个点将永远被堵塞.

假设 $R$ 是一个堵塞点序列 $(r_1, r_2, \cdots, r_k)$,令 $C_{\mathrm{opt}}(r_1)$ 表示事先已知 $r_1$ 点会发生堵车的情况下把货物从初始点 $O$ 运送到目的点 $D$ 所花费的最小费用.$C_{\mathrm{opt}}(r_1, r_2)$ 表示事先已知 $r_1, r_2$ 发生堵塞不能通过情况下把货物从初始点 $O$ 运送到目的点 $D$ 所花费的最小费用.$C_{\mathrm{opt}}(r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 的含义以此类推.如果当运输车走到 $r_1$ 之前的一个点后,发现 $r_1$ 发生堵塞而后用算法 ALG 求出下一步要走的路径,令 $C_{\mathrm{ALG}}(r_1)$ 表示此路径的费用.令 $\mathrm{CT}_{\mathrm{ALG}}(r_1)$ 表示运输车在此情况下最终将货物从 $O$ 点运输到 $D$ 点所花费的运输费用.

同样如果运输车走到 $r_1$ 之前的一个点后,发现 $r_1$ 发生堵塞而用算法 ALG 求出此时的最优路径,运输车沿着此路径行进而后走到 $r_2$ 之前的一个点后发现 $r_2$ 点发生堵塞,再次运用算法 ALG 求出下一步要走的路径,$C_{\mathrm{ALG}}(r_1, r_2)$ 表示此路径的费用.然后运输车沿着这条路径将货物运送到目的节点.同样令 $\mathrm{CT}_{\mathrm{ALG}}(r_1, r_2)$ 表示在这种情况下将货物从 $O$ 点运到 $D$ 点总的运输费用,$C_{\mathrm{ALG}}(r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 和 $\mathrm{CT}_{\mathrm{ALG}}(r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 的含义以此类推.

如果总存在与堵车点序列无关的常数 $\alpha$ 和 $\beta$ 满足

$$\mathrm{CT}_{\mathrm{ALG}}(R) \leq \alpha C_{\mathrm{opt}}(R)+\beta$$

则称算法 ALG 为此局内问题的竞争算法,且其竞

争比为 $\alpha$[1,8,9].

## 2 贪婪策略、复位策略及其竞争比分析

### 2.1 贪婪策略

考虑这样一种策略,不管将来以后的堵塞点的序列将会是如何,在情况已知的条件下求出此时的最优路径,然后调度运输车沿着此路径进行运输.假设算法 $A$ 就是基于此贪婪思想的一种算法,下面的讨论都将以算法 $A$ 为贪婪策略的一个例子来进行分析.

算法 $A$ 两种情况下的竞争结果

1) 单个堵塞点

**引理1** 假设在没有点发生堵塞的情况下的最优路径为 SP,在 $r$ 点发生堵塞的情况下的最优路径为 $SP_r$,则 $W(SP) \le W(SP_r)$.

**证明(反证法)** 如果论题不成立,即在 $r$ 点发生堵塞后找出了一条不过 $r$ 点的 $SP_r$,且 $W(SP_r) \le W(SP)$.如果这样,那么在 $r$ 点没有发生拥塞的情况下, $SP_r$ 同样存在,且 $W(SP_r) \le W(SP)$ 成立.而这与在 $r$ 点不发生拥塞的情况下 SP 是最短路径相互矛盾.所以假设不成立.命题得证. 证毕

**定理1** 对于只有一个堵塞点 $r$ 的情况下,算法 $A$ 的竞争比为 3.

**证明** 如果能找到一个与堵塞点无关的常数 $\beta$,使得

$$CT_A(r) \le 3C_{opt}(r) + \beta$$

成立,那就可以说算法 $A$ 是此局内最短路径问题竞争比为 3 的竞争算法.

考虑如下情况:运输车走到 $r$ 点之前的一个点发现前方的 $r$ 点发生拥塞不能通过,运用算法 $A$ 求出此时的最优路径.显然最优路径在最坏的情况下不会超过重新退回到初始点 $O$,然后沿着从对应局外问题的最优路径进行运输的费用.由于开始沿着最短路径在行驶,所以退回到初始 $O$ 点的花费不会超过 $W(SP)$.而 $C_{opt}(r)$ 恰好是从 $O$ 点不经过 $r$ 点运输到目的节点 $D$ 的最小费用,所以

$$CT_A(r) \le C_{opt}(r) + W(SP) + W(SP)$$

由引理 1 可知: $W(SP) \le W(SP_r)$, 而 $W(SP_r) = C_{opt}(r)$,所以有

$$CT_A(r) \le 3C_{opt}(r)$$

令 $\beta = 0$,则 $CT_A(r) \le 3C_{opt}(r) + \beta$ 显然成立,所以算法 $A$ 的竞争比为 3. 证毕

2) 堵塞点的序列 $R = (r_1, r_2, \cdots, r_k)$

**引理2** 用 $C_{opt}(r_i)$ 表示点 $r_i$ 发生堵塞的情况下,对应局外问题的最优解;同样用 $C_{opt}(R)$ 表示在点序列 $R = (r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 发生堵塞的情况下对应局外问题的最优解.则有

$$C_{opt}(r_1) \le C_{opt}(r_1, r_2) \le \cdots \le C_{opt}(R)$$

**证明(反证法)** 假设 $C_{opt}(R) \le C_{opt}(r_1)$,由题设可知, $R = (r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 发生堵塞的情况下,求 $C_{opt}(R)$ 实际上是求子图 $G - \{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$ 的最优路径 $SP_R$,其中 $C_{opt}(R)$ 等于 $W(SP_R)$,而求 $C_{opt}(r_1)$ 相当于是求子图 $G - \{r_1\}$ 的最优路径 $SP_{r_1}$,其中, $C_{opt}(r_1)$ 等于 $W(SP_{r_1})$.

如果假设成立,即在子图 $G - \{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$ 中存在这样一条最优路径 $SP_R$.因为知道子图 $G - \{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$ 真属于子图 $G - \{r_1\}$,即在子图 $G - \{r_1\}$ 同样存在着这样一条路径 $SP_R$,根据假设 $C_{opt}(R) \le C_{opt}(r_1)$,即 $W(SP_R) \le W(SP_{r_1})$,这与 $SP_{r_1}$ 是子图 $G - \{r_1\}$ 的最优路径相矛盾,所以假设不成立.

同样可以证明 $C_{opt}(r_1) \le C_{opt}(r_1, r_2)$; $C_{opt}(r_1, r_2) \le C_{opt}(r_1, r_2, r_3)$,因此命题成立.

证毕

**引理3** $C_A(r_1, r_2, \cdots, r_k) \le C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_k) + C_A(r_1, r_2, \cdots, r_{k-1}) + \cdots + C_A(r_1) + W(SP)$

**证明** 运用数学归纳法

考虑在最坏的情况下,如图 1 所示.

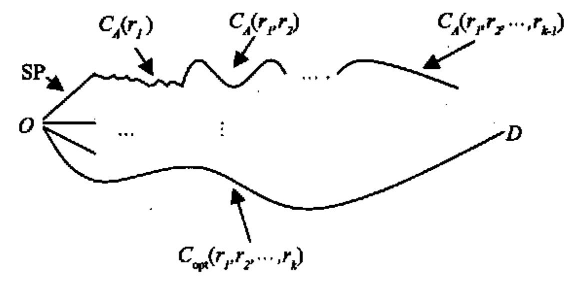


图1 最坏情形示意图

通过对定理 1 的分析可知, $C_A(r_1)$ 在最坏的情况下也就是沿着最短路径返回,然后沿着相应的局外问题的最优解行驶,所以应有 $C_A(r_1) \le C_{opt}(r_1) + W(SP)$ 成立.

当 $k = 2$ 时,对于只有两个堵塞点的序列$(r_1,$

$r_2)$,同样可以参考上面的情况,不过此时最坏的情况如下:当运输车沿着最优路径 SP 行驶到 $A$ 点后发现前面的 $r_1$ 发生堵塞不能通过,只好沿着此时用算法 $A$ 求出的最优路径行驶,当 $r_2$ 发生堵塞,然后再退回初始点,并沿着此时对应局外问题求出的最优路径 $SP(r_1, r_2)$ 进行运输. 所以整个过程有如下不等式成立

$$C_A(r_1, r_2) \le C_{opt}(r_1, r_2) + C_A(r_1) + W(SP) \quad (1)$$

根据上面对 $k = 2$ 时的证明,可以知道如果 $k = i - 1$ 时成立,即有

$$C_A(r_1, r_2, \cdots, r_{i-1}) \le C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_{i-1}) + C_A(r_1, r_2, \cdots, r_{i-2}) + \cdots + C_A(r_1) + W(SP) \quad (2)$$

当 $k = i$ 时,根据对当 $k = 2$ 时的分析应有不等式

$$C_A(r_1, r_2, \cdots, r_i) \le C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_i) + C_A(r_1, r_2, \cdots, r_{i-1}) + C_A(r_1, r_2, \cdots, r_{i-2}) + \cdots + C_A(r_1) + W(SP) \quad (3)$$

即 $k = i$ 时,上述命题同样成立.

运用数学归纳法可知,上式在任何情况下都成立.　　证毕

**定理 2**　算法 $A$ 对于堵塞点序列为 $R = (r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 的局内车辆选线问题的竞争比为 $2^{k+1} - 1$

**证明**　由引理 3 可知

$$C_{opt}(r_1) \le C_{opt}(r_1, r_2) \le \cdots \le C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_{k-1}) \le C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_k) \quad (4)$$

根据式(1)—(3)可知,整个 $C_A(r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 可以看成是一个数列,简单地用 $D_k$ 表示 $C_A(r_1, r_2, \cdots, r_k)$, $T_k$ 表示 $C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_k)$, $a$ 表示 $W(SP)$,则上面的式子可以简单表示为

$$D_1 \le T_1 + a$$
$$D_2 \le T_2 + D_1 + a$$
$$\cdots\cdots$$
$$D_k \le T_k + D_{k-1} + D_{k-2} + \cdots + D_1 + a$$

根据式(4),知道 $T_1 \le T_2 \le \cdots \le T_k$,将上式右边都放大,可以得到

$$D_1 \le T_k + a \quad (5)$$
$$D_2 \le T_k + D_1 + a \quad (6)$$
$$\cdots\cdots$$
$$D_k \le T_k + D_{k-1} + D_{k-2} + \cdots + D_1 + a \quad (7)$$

将式(5)代入式(6),可以得到 $D_2 \le 2(T_k + a)$,同样对于 $D_3$,有 $D_3 \le 2^2(T_k + a)$ 成立.

现假设当 $n = k - 1$ 时有 $D_{k-1} \le 2^{k-2}(T_k + a)$ 成立,则在 $n = k$ 时,因为 $D_k \le T_k + D_{k-1} + D_{k-2} + \cdots + D_1 + a$,将 $n = k - 1$ 时, $D_{k-1} \le 2^{k-2}(T_k + a)$ 代入应有如下不等式成立

$$D_k \le 2^{k-1}(T_k + a)$$

根据数学归纳法可知,对于任意的 $k$,上式都成立.

根据原有的定义可知

$$C_A(r_1, r_2, \cdots, r_k) \le 2^{k-1}(C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_k) + W(SP)) \quad (8)$$

所以对于贪婪算法,在最坏的情况下运输车的花费应为

$$CT_A(r_1, r_2, \cdots, r_i) \le C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_k) + 2\{C_A(r_1, r_2, \cdots, r_{i-1}) + C_A(r_1, r_2, \cdots, r_{i-2}) + \cdots + C_A(r_1) + W(SP)\}$$

根据式(8)可得, $CT_A(r_1, r_2, \cdots, r_i) \le C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_k) + 2 \times \{2^{k-2} + 2^{k-3} + \cdots + 1\} D_1 + 2W(SP)$,

即

$$CT_A(r_1, r_2, \cdots, r_i) \le C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_k) + (2^k - 2) D_1 + 2W(SP)$$
$$CT_A(r_1, r_2, \cdots, r_i) \le C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_k) + (2^k - 2) T_k + 2^k a$$
$$CT_A(r_1, r_2, \cdots, r_i) \le 2^k(T_k + a) - C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_k)$$
$$CT_A(r_1, r_2, \cdots, r_i) \le 2^{k+1} T_k - C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_k)$$
$$CT_A(r_1, r_2, \cdots, r_i) \le (2^{k+1} - 1) C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_k)$$

根据竞争比的定义,可知算法 $A$ 是对于堵塞点序列为 $R = (r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 的局内车辆选线问题的竞争比为 $2^{k+1} - 1$ 的算法.　　证毕

### 2.2　复位策略(简称算法 $B$)

考虑这样一种调度方案:复位策略. 在运输车辆走到一点 $A$ 后,发现前面的 $B$ 点发生拥塞而不能通过,此时可以先把运输车辆调回到初始点 $O$,然后求出去掉 $B$ 点后从 $O$ 点到 $D$ 点的最优路径,

然后调度运输车辆沿着此最优路径行驶. 也就是在每次发现堵塞点后,先回到初始点,然后重新选择在此情况下的最优路径.

下面对复位策略的竞争比进行分析.

算法 $B$ 两种情况下的竞争结果

1) 单个堵塞点

**定理3** 对于只有一个堵塞点 $r$ 的情况下,算法 $B$ 的竞争比为3.

**证明** 如果能找到一个与堵塞点无关的常数 $\beta$,使得

$$CT_B(r) \le 3C_{opt}(r) + \beta$$

成立,那就可以说算法 $B$ 是此局内最短路径问题竞争比为3的竞争算法.

考虑如下情况:运输车走到 $r$ 点之前的一个点发现前方的 $r$ 点发生拥塞不能通过,运输车只好重新退回到初始点 $O$,然后沿着从算法 $r$ 中求出的此时的最优路径进行运输. 由于开始沿着最短路径在行驶,所以退回到初始 $O$ 点的花费不会超过 $W(SP)$. 而 $C_{opt}(r)$ 恰好是从 $O$ 点不经过 $r$ 点运输到目的节点 $D$ 的最小费用,所以

$$CT_B(r) \le C_{opt}(r) + W(SP) + W(SP)$$

由引理1可知: $W(SP) \le W(SP_r)$,而 $W(SP_r) = C_{opt}(r)$,所以有

$$CT_B(r) \le 3C_{opt}(r)$$

令 $\beta = 0$,则 $CT_B(r) \le 3C_{opt}(r) + \beta$ 显然成立,所以算法 $B$ 的竞争比为3. 证毕

2) 堵塞点的序列 $R = (r_1, r_2, \cdots, r_k)$

**引理4** $C_B(r_1, r_2, \cdots, r_k) \le C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_k) + C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_{k-1})$.

**证明** 运用数学归纳法

根据对定理1的分析和证明,可知: $C_B(r_1) \le C_{opt}(r_1) + W(SP)$,显然满足上式.

当 $k = 2$ 时,对于只有两个堵塞点的序列 $(r_1, r_2)$,同样可以证明上式成立. 参考定理1的证明,如下情况下:当运输车沿着最优路径 SP 行驶到 $A$ 点后发现前面的 $r_1$ 发生堵塞不能通过,只好沿着最短路径退回到初始点 $O$,然后再重新沿着 $r_1$ 发生堵塞对应的局外问题的最优解行驶,当再次发现 $r_2$ 发生堵塞,然后再退回初始点,并沿着此时对应局外问题求出的最优路径 $SP(r_1, r_2)$ 进行运输. 由于退回的总费用不会高于 $C_{opt}(r_1)$,所以整个过程有如下不等式成立

$$C_B(r_1, r_2) \le C_{opt}(r_1, r_2) + C_{opt}(r_1)$$

根据上面对 $k = 2$ 时的证明,分析当 $k = i$ 时,对应最坏的情况就是沿着 $C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_{i-1})$ 的路径退回到初始点,然后沿着 $C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_i)$ 行驶,因此应有不等式

$$C_B(r_1, r_2, \cdots, r_i) \le C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_i) + C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_{i-1}) \tag{9}$$

即 $k = i$ 时,上述命题同样成立.

运用数学归纳法可知,上式在任何情况下都成立. 证毕

**定理4** 算法 $B$ 对于堵塞点序列为 $R = (r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 的局内车辆选线问题的竞争比为 $2k + 1$.

**证明** 运输车总共行驶的路程

$$CT_B(r_1, r_2, \cdots, r_k) = C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_k) + C_B(r_1, r_2, \cdots, r_{k-1}) + \cdots + C_B(r_1) + W(SP) \tag{10}$$

根据引理4,知道对于任意 $i$,有 $C_B(r_1, r_2, \cdots, r_i) \le C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_i) + C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_{i-1})$ 成立. 将 $i = 1$ 到 $k$ 代入上式可得

$$CT_B(r_1, r_2, \cdots, r_k) \le C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_k) + 2C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_{k-1}) + \cdots + 2C_{opt}(r_1) + 2W(SP) \tag{11}$$

由引理3,可知

$$W(SP) \le C_{opt}(r_1) \le C_{opt}(r_1, r_2) \le \cdots \le C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_{k-1}) \le C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_k)$$

结合式(11)可得

$$CT_B(r_1, r_2, \cdots, r_k) \le (2k+1)C_{opt}(r_1, r_2, \cdots, r_k)$$

根据竞争比的定义,可知算法 $B$ 是对于堵塞点序列为 $R = (r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 的局内车辆选线问题的竞争比为 $2k + 1$ 的算法. 证毕

## 3 局内车辆选线问题的竞争比下界

由于本文考虑竞争算法的竞争比是一种最坏情形分析,也就是说,此竞争算法在各种情况下的解不会超过其最优解一个竞争比的倍数.

一个局内问题的竞争比下界是指对于解决此局内问题的所有竞争算法,他们的竞争比都大于等于某一个常数的话,就称这个常数为此局内问

题竞争比的最低下界. 所以在考虑对于一个局内问题本文所提出的竞争策略是否具有最优性的时候,通常是从理论上证明这个局内问题竞争比的最低下界,然后将所提出算法的竞争比与这个最低下界相比,看它是否具有最优性. 同样,对于本文所提出的局内车辆选线问题,它同样应该具有一个最低的竞争比下界. 下面通过数学证明说明上述问题的最低竞争比下界.

**定理 5**　局内车辆选线问题竞争比下界为 $2k+1$.

证明(反证法)　假设存在一种竞争算法 $H$ 使得对于局内车辆选线问题的竞争比为 $h$, 且 $h < 2k+1$. 不失一般性,则算法 $H$ 对于任何情况下的局内车辆选线问题上述假设都成立. 现假设有如下一个交通网络图,该图除了初始点 $O$ 和目的点 $D$ 之外,其他点的出度和入度均为 1(见图 2).

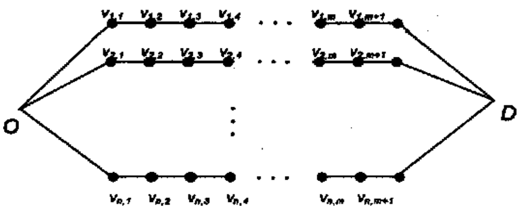


图 2　特殊交通网络图

假设在图 2 中 $n$ 条路径上有 $k$ 个点发生堵塞,并且任何两个堵塞点都不在一条路径上. 通过对图的观察可以发现,如果走到一条路径上某点发现前面有堵塞点,那运输车辆只有一条路可以选择:也就是回到初始点然后重新选择最优路径. 由于竞争算法对于点的顺序无关,假设所有的堵塞点都发生在 $v_{j,m+1}(j \in n)$,但事先并不知道到底是哪些点. 并且假设距离 $d_{o,v_{j,m}} = d$,而 $d_{v_{1,m+1},D} < d_{v_{2,m+1},D} < d_{v_{3,m+1},D} < \cdots < d_{v_{n,m+1},D} \ll d$.

如果存在算法 $H$,它的竞争比小于 $2k+1$,则算法 $H$ 一定不需走过 $k+1$ 条路径就能走到目的节点 $D$. 下面证明这种算法是不存在的.

假设算法 $H$ 是一种选路策略,不管堵塞点在何处,总能在选择 $k+1$ 次之内找到走到目的节点 $D$. 由于知道只有走到堵塞点前一个节点才知道会发生堵塞,而且 $d_{o,v_{j,m}} = d$. 因此在从 $O$ 点重新选择路径时,堵塞点的 $k$ 条路径和其他路径是完全同质的. 如果有确定策略 $H$,使得不管堵塞点如何变化,总能在 $k+1$ 次之内找到从 $O$ 到 $D$ 的路径,那同样确定的存在一种 Rival 策略 $H'$,使得 $H$ 策略无法完成. 对于本问题也就是说,总存在一种策略,将那些没有堵塞点的路径和有堵塞点的路径进行调换,使得算法 $H$ 无法在 $k+1$ 次之内找到从 $O$ 到 $D$ 的路径. 结果似乎很显然. 因为只要找到了一种策略,比如说在走了 $h+1$ 次就找到了这样一条路径,就可以将另外 $k-h$ 条中一条有堵塞点的路径和最后走的没有堵塞点的路径进行调换,来极力防止从 $O$ 到 $D$. 这个过程一直可以持续到 $k$ 条有堵塞点的路径都被走过为止. 显然如果策略 $H$ 存在,则策略 $H'$ 一定存在.

从上面的分析可知,对于局内车辆选线问题,不存在任何一种竞争策略能对于不同的堵塞点序列在选择 $k$ 次之前找到从 $O$ 到 $D$ 的路径,也就是说任何一种竞争策略都将至少走过 $k$ 条边. 因此对应于策略 $H$,应有如下不等式成立

$$C_{\mathrm{opt}}(r_1, r_2, \cdots, r_k) + 2C_{\mathrm{opt}}(r_1, r_2, \cdots, r_{k-1}) + \cdots + 2C_{\mathrm{opt}}(r_1) + 2W(\mathrm{SP}) \le \mathrm{CT}_H(r_1, r_2, \cdots, r_k)$$

根据 $d_{v_{1,m+1},D} < d_{v_{2,m+1},D} < d_{v_{3,m+1},D} < \cdots < d_{v_{n,m+1},D} \ll d$, 因此 $W(\mathrm{SP}) \approx C_{\mathrm{opt}}(r_1) \approx \cdots \approx C_{\mathrm{opt}}(r_1, r_2, \cdots, r_{k-1}) \approx C_{\mathrm{opt}}(r_1, r_2, \cdots, r_k)$.

因此应有: $(2k+1)C_{\mathrm{opt}}(r_1, r_2, \cdots, r_k) + \xi \le \mathrm{CT}_H(r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 成立,其中如果 $d$ 相对 $d_{v_{n,m+1},D}$ 足够大,则 $\xi$ 是一个可以任意小的数. 因为

$$c_H^{\mathrm{ADOFF}} \equiv \inf_c \left\{ \frac{\mathrm{CT}_H(r_1, r_2, \cdots, r_k)}{C_{\mathrm{opt}}(r_1, r_2, \cdots, r_k)} \right\} = (2k+1)$$

因此不存在一种竞争算法 $H$ 使得对于局内车辆选线问题的竞争比为 $h$, 且 $h < 2k+1$. 即对于局内车辆选线问题的最低竞争比下界为 $2k+1$.

## 4　结束语

作为优化领域热点研究方向,局内问题及其竞争算法的提出对传统优化研究所带来的变革是具有革命性的. 正如前面论述的那样,传统的优化理论以旁观者的立场考虑问题,对某一问题的优化总是以知道必要的全部条件不发生变化为前提条件,而这在现实生活中显然不合实际;而局内问题的研究正是在不考虑一些对优化对象有致命影

响的因素变化的前提下来考虑对目标对象的优化.所以局内问题与竞争算法的研究对优化领域的贡献必将是非常巨大的.

本文所讨论的局内车辆问题的优化指标为运输车辆所走过的总路程.通过贪婪策略和复位策略的提出,同时比较了在两种不同情况下两种策略的各自的竞争比.证明了在堵塞点序列为 $R=(r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 时,贪婪策略和复位策略对应的竞争比分别为 $2^{k+1}-1$ 和 $2k+1$.最后证明了 $2k+1$ 是此局内车辆选线问题竞争比的最低下界.从而在理论上证明了复位策略具有最优的竞争比,使得所提出的局内车辆选线问题的研究比较完整.对于本文所讨论的问题有许多待进一步深入研究的理论问题及一些未解决的有关猜想,如堵塞点可以恢复如何考虑调度方案等,这将是作者下一步要研究的方向和问题.

## 参考文献:


[1] Manasse M S, McGeoch L A, Sleator D D. Competitive algorithms for server problems[J]. Journal of Algorithms, 1990, 11(2): 208—230

[2] David S B, Borodin A. A new measure for the study of the on-line algorithm[J]. Algorithmica, 1994, 11(1): 73—91

[3] Koutsoupias E, Papadimitriou C. On the *k*-server conjecture[J]. Journal of ACM, 1995, 42(5): 971—983

[4] Alon N, Karp R M, Peleg D, *et al*. A graph-theoretic game and its application to the *k*-server problem[J]. SIAM J Comput, 1995, 24(1): 78—100

[5] Pinnoi A, Tung D T. Vehicle routing-scheduling for waste collection in Hanoi[J]. European Journal of Operational Research, 2000, 125 (3): 449—468

[6] Xu Y Y, Wang K L, Zhu B H. On the *k*-taxi problem[J]. Information Processing Letter, 1999, 2 (4): 429—434

[7] 徐寅峰, 王刊良. 局内出租车调度与竞争算法[J]. 西安交通大学学报, 1997, (1): 56—61

[8] 堵丁柱. *k* 车服务问题与竞争算法[J]. 数学的实践与认识, 1991, (4): 6—40

[9] Koutsoupias E, Taylor D S. The CNN Problem and Other *k*-server Variants [C]. In 17th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science. Lille, France: Springer, 17—19 February 2000


## 作者简介:


朱志军(1977 —),男,湖北襄樊人,博士生.研究方向:局内问题和竞争算法.

徐寅峰(1962 —),男,吉林人,博士,教授、博士生导师.研究方向:控制与调度优化.

刘春草(1969 —),女,湖南人,博士生.研究方向:金融博弈.