

滚齿齿面棱面度的精确计算

陕西机械学院 张治中 徐寅峰

摘要 本文应用矢函数法得出了滚齿齿面棱面度的精确计算公式, 它比F. Pohl^[1]和B. A. Тайн^[2]的棱面度计算公式及图表的计算精度更高, 并提供了新的棱面度与齿数关系曲线图。

关键词 精确计算 棱面度 滚齿 齿面

一、前言

滚齿是齿轮加工生产率较高、应用广泛的一种工艺, 加工精度可达机标 JB179-83 的4级精度。滚齿时, 齿廓是由若干个有限的滚刀刀刃包络切成的, 刀刃在齿面上的切痕, 在齿轮的端截面上是一组包络渐开线齿廓的折线。当采用单头滚刀滚切齿轮时, 齿廓上的折线数目等于滚刀的容屑槽数和滚齿时重合度 e 的乘积。由于包络齿廓的折线数目是有限的, 因此, 实际齿廓与理论渐开线之间存在着一定的差异。人们将这些折线的交点与理论渐开线之间的距离, 叫做“棱面度”, 或称“多角形误差”^[3], 这是滚齿工序带来的齿形误差成份, 见图1。显然, 棱面度的大小将直接影响齿形误差 Δf_f 的数值。20多年前, F. Pohl^[1]和B. A. Тайн^[2]提出的棱面度计算

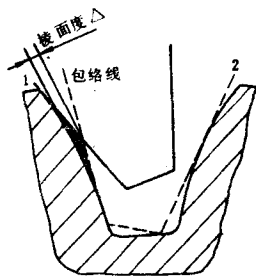


图1 滚齿的齿形误差成份

公式为

$$\Delta_{Pohl} = \frac{\pi^2 \cdot m \cos \alpha \cdot \tan \alpha_a}{4 \cdot z \cdot (k/z_T)^2} \quad (1)$$

式中 m ——被切齿轮的模数

α ——被切齿轮的分圆压力角

α_a ——被切齿轮的顶圆压力角

z_T ——滚刀头数

k ——滚刀的容屑槽数

z ——被切齿轮的齿数

上述公式的计算误差较大, 本文应用矢函数法得出了更为精确的计算公式。

二、棱面度计算公式的解剖

当渐开线齿轮和齿条啮合时, 参照渐开线的性质, 可以写出齿形的参数方程(见图2)。

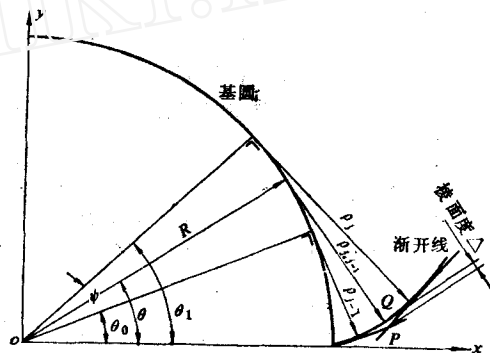


图2 渐开线齿轮同齿条啮合关系

$$\begin{cases} x = R \cos \theta + R \theta \sin \theta \\ y = R \sin \theta - R \theta \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

其矢径

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad (3)$$

式中 R ——基圆半径

θ ——展开角(见图2)

又由于渐开线展成角 θ 的切线方程为^[4]

$$\vec{\rho} = \vec{r}'(\theta) + \lambda \vec{r}''(\theta) \quad (4)$$

式中 λ ——参变数

则对应于 $\theta = \theta_0$ 的切线方程为

$$\begin{cases} x_0 = R \cos \theta_0 + R \theta_0 \sin \theta_0 + \lambda_0 R \theta_0 \cos \theta_0 \\ y_0 = R \sin \theta_0 - R \theta_0 \cos \theta_0 + \lambda_0 R \theta_0 \sin \theta_0 \end{cases} \quad (5)$$

当 θ_0 具有增量 ψ 后, 即 $\theta_1 = \theta_0 + \psi$ 时, 将得到另一组切线方程

$$\begin{cases} x_1 = R \cos \theta_1 + R \theta_1 \sin \theta_1 + \lambda_1 R \theta_1 \cos \theta_1 \\ y_1 = R \sin \theta_1 - R \theta_1 \cos \theta_1 + \lambda_1 R \theta_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (6)$$

式(5)和(6)分别为渐开线展成角 θ_0 和 θ_1 的切线方程, 则两切线方程的交点应满足下列条件, 即

$$\begin{cases} x_0 = x_1 \\ y_0 = y_1 \end{cases}$$

由此, 可解得参变数 λ_0 , 即

$$\lambda_0 = \frac{\theta_1 - \sin(\theta_1 - \theta_0) - \theta_0 \cos(\theta_1 - \theta_0)}{\theta_0 \sin(\theta_1 - \theta_0)} \quad (7)$$

将式(7)的参变数 λ_0 代入式(5), 得到两切线交点的坐标 $P(x_p, y_p)$,

$$\begin{cases} x_p = \frac{\theta_1 \cos \theta_0 - \theta_0 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 - \theta_0)} \cdot R \\ y_p = \frac{-\theta_1 \sin \theta_0 - \theta_0 \sin \theta_1}{\sin(\theta_1 - \theta_0)} \cdot R \end{cases} \quad (8)$$

若渐开线 $\vec{r} = \vec{r}(\theta)$ 上的点矢 $\vec{r}(\theta)$ 满足 $|\vec{r} - \vec{p}|$ 为最小, 则绝对值 $|\vec{r} - \vec{p}|$ 就是所求的棱面度。因此, 点矢 $\vec{r}(\theta)$ 应满足

$$(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{r}' = 0 \quad (9)$$

$$\text{式中 } \begin{cases} \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} \\ \vec{p} = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} \end{cases}$$

参照矢量运算的分配律, 有

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' - \vec{p} \cdot \vec{r}' = x \cdot x' + y \cdot y' - (x_p x' + y_p y') = 0 \quad (10)$$

将式(2)和(8)代入式(10), 解得

$$\sin(\theta_1 - \theta_0) - \theta_1 \cos(\theta - \theta_0) + \theta_0 \cos(\theta - \theta_1) = 0 \quad (11)$$

按泰勒级数分别将 $\sin(\theta_1 - \theta_0)$ 、 $\cos(\theta - \theta_0)$ 和 $\cos(\theta - \theta_1)$ 展开, 并略去三阶以上无穷小量后, 得

$$(\theta_1 - \theta_0) \cdot (\theta_1 \theta_0 - \theta^2) = 0$$

由于切削角 $\psi = \theta_1 - \theta_0 \neq 0$, 则有

$$\theta_1 \theta_0 - \theta^2 = 0$$

$$\text{即 } \theta = \pm \sqrt{\theta_1 \theta_0} \quad (12)$$

上式表明: 渐开线 $\vec{r} = \vec{r}(\theta)$ 上对应于 $\theta = \sqrt{\theta_1 \theta_0}$ 的点 $Q(x_Q, y_Q)$ 可以作为所求的点矢。因此, 通过 $P(x_p, y_p)$ 点的直线 PQ 必定垂直于渐开线的切线, 且 PQ 的延长线必然是基圆的切线, 即 $\rho_{i,j-1}$ 和 PQ 处于一条直线上, 见图2。所以, $|PQ|$ 就是所求的棱面度。由此, 可以得到 $Q(x_Q, y_Q)$ 点的坐标方程

$$\begin{cases} x_Q = R \cos \sqrt{Q_0 Q_1} + R \sqrt{\theta_0 \theta_1} \sin \sqrt{\theta_0 \theta_1} \\ y_Q = R \sin \sqrt{\theta_0 \theta_1} - R \sqrt{\theta_0 \theta_1} \cos \sqrt{\theta_0 \theta_1} \end{cases} \quad (13)$$

令棱面度 $\Delta = |PQ|$, 则

$$\Delta^2 = (x_p - x_Q)^2 + (y_p - y_Q)^2$$

将式(8)和式(13)代入上式后, 解得

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2}{R^2} &= \left[\frac{1}{15} + \frac{\theta_1 \theta_0}{24} - \frac{1}{26 \times 3} \cdot \frac{\theta_1}{\theta_0} + \frac{1}{12} \right. \\ &\quad \cdot \frac{\theta_1 \theta_0}{(\sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_0})^4} - \frac{1}{60} \\ &\quad \left. + \frac{\theta_1 \theta_0 (\theta_0^2 \sqrt{\theta_1} + \theta_1^2 \sqrt{\theta_0})}{(\sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_0})^5} - \frac{7}{180} \right] \end{aligned}$$

$$\cdot (1 + \theta_1 \theta_0) + \frac{1}{18} \cdot \frac{\theta_1 \theta_0 \sqrt{\theta_1 \theta_0}}{(\sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_0})^2} \Big] - \psi^4 + \dots$$

又以 $\theta_1 = \theta_0 + \psi$ 代入上式, 且因 $\psi < 0.07$, 略去 ψ 的五阶以上高次分量后, 得

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \left[\left(\frac{R}{6} \right)^2 + \left(\frac{R \theta_0}{8} \right)^2 \right] \psi^4 \\ &= \left[\left(\frac{R}{6} \right)^2 + \left(\frac{\rho_0}{8} \right)^2 \right] \psi^4 \end{aligned}$$

所以

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{\theta_0^2}{64}} \cdot R \psi^2 \quad (14)$$

式(14)表明: 棱面度随渐开线的曲率半径增大而加大, 即最大棱面度出现在齿顶部位, 而该处的曲率半径为

$$\rho_a = R \operatorname{tg} \alpha_a$$

$$\text{或 } \rho_a = \frac{mz}{2} \cos \alpha_a \operatorname{tg} \alpha_a$$

由于切削角 $\psi = 2\pi z_T / (zk)$, 将基圆半径 R 、切削角 ψ 和齿顶处的展开角 $\theta_0 = \operatorname{tg} \alpha_a$ 代入式(14), 即可求得棱面度的计算公式

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_a}{16}} \cdot \frac{\pi^2 m \cos \alpha_a}{z(k/z_T)^2} \quad (15)$$

三、与Pohl和Таїц计算式的差异

求解棱面度计算式(14)时, 将 $\sin(\theta - \theta_0)$ 按泰勒级数展开后略去了高阶分量, 存在着截断误差。为了直观地了解式(15)的计算误差, 现按文献[2]中的示例, 计算齿顶处的最大棱面度列于下表。其中:

1. 按式(8)、(12)、(13)精确计算棱面度;
2. 按 Pohl 和 Таїц 计算式(1)计算棱面度;
3. 利用式(15)计算棱面度。

值得注意的是: Pohl 和 Таїц 推荐的公式(1)

棱面度计算值

计算式	精确解	Pohl 公式解	式(15)解
计算内容			
齿顶处棱面度 (μm)	17.9	8.1	18.0
相当 JB179-83 齿形误差 Δ_{f1} (级)	8	6	8

[注]: 单头滚刀 $k=8$, $z_T=1$; 滚切 $m=5$, $z=15$ 标准齿轮。

(下转第24页)

(3) 缸类：指液压系统中的执行元件，包括往复及摆动式油缸等。

(4) 辅件：指液压系统中作为介质过滤、冷却、蓄能、管件及其总成等，包括滤油器、冷却器、软管总成、管接头、空气滤清器等。

(5) 液压成套装置：指由各类元件和辅件组成的主机传动和控制系统的完整装置。

(6) 过滤装置：指控制液压系统中介质清洁度的装置。

(7) 液压夹具：指利用液压能进行夹紧机床加工零件的夹具。

4. 机床气动件 指机床及铸锻机械气动系统中所用的气动元器件、辅件及成套装置。该产品分以下8大类（由北京机床研究所归口管理）：

(1) 阀类：指控制系统中的控制元器件。

(2) 缸类：指气动系统中的执行元件，包括往复及摆动式汽缸、制动缸、磁性缸及数字缸等。

(3) 辅件：包括滤油器、润滑器、密封件、软管总成、接头等。

(4) 气动成套装置：指由各类元件和辅件组成的主机传动和控制系统的完整装置。

(5) 过滤装置：指控制气动系统中介质清洁度的装置。

(6) 气液夹具：指利用气液能进行夹紧机床加工零件的夹具。

(7) 气动模块：指可组成多自由度经济型机械

手等装置。

(8) 安全联锁阀：此阀为锻压机械专用阀。

5. 机床化工产品 指机床行业所采用的润滑、冷却、防锈和密封等化工材料及其制品。该产品分以下6小类（由广州机床研究所归口管理）：

(1) 工艺用液：指各种切削液、磨削液、电加工用液、压力成型加工用润滑剂、压铸润滑剂等。

(2) 润滑剂及抗摩材料：指各类润滑油、脂、高分子抗摩材料、塑料导轨及导轨软带等。

(3) 机床用油漆及防锈材料：指各类油漆、涂料、防锈剂、防锈纸及包装封存材料等。

(4) 密封材料：指各类密封圈、密封垫片及密封胶等。

(5) 粘结及凝固剂：指各类粘结胶、结构胶及浸渗胶等。

(6) 清洗剂：指各工序间的清洗洁净剂、表面处理剂等。

6. 铸造机械专用部件 指与机床不能通用而具铸造专业特点的产品。该产品分以下8小类（由济南铸锻机械研究所归口管理）：(1) 紧实、固化部件；(2) 振动功能配套件；(3) 抛丸器；(4) 耐磨、耐热、耐腐蚀件；(5) 检测显示和控制装置；(6) 工艺装置；(7) 辅机；(8) 环境保护装置。

7. 锻压机械专用部件 指与机床不能通用而具锻压机械特性的配套产品。

(上接第19页)

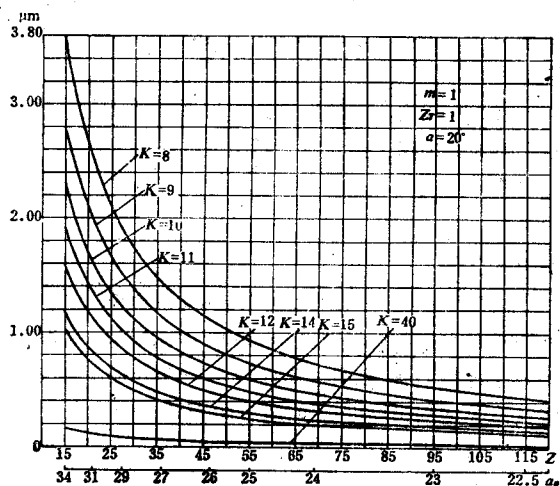


图3 新设计的棱面度计算图表

在计算棱面度时，竟小于精确解的1.2倍，齿形误差值

相差机标(JB179-83)二个精度等级。

此外，比较 Pohl 和 Таиц 式(1)与式(15)时，有

$$\frac{\Delta}{\Delta_{Pohl}} = \sqrt{1 + \frac{16}{9 \tan^2 \alpha}}$$

即在压力角愈小时，Pohl 和 Таиц 公式(1)的计算误差愈大。

图3为新设计的棱面度计算图表。应用图3计算的误差值将比文献[1]、[2]中图65及图47的更为精确。

参 考 文 献

- 1 G. BROERSMA, Manufacture and testing of gear. NICI, Gent, Belgium, 1969, pp 41-43.
- 2 Б. А. ТАИЦ, Точность и контроль зубчатых колес. Машиностроение, Москва, 1972, pp 62-65.
- 3 曾田俊夫等. 齿車の設計・制作(I). 大河出版刊, 1971, pp 240-241.
- 4 吴大任. 微分几何讲义. 人民教育出版社(第4版), 1982.