第6卷 第1期
1993年 元月

应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA

Vol. 6 No. 1
January 1993

# 一类特殊矩阵的逆特征值问题*

徐寅峰
(中国科学院应用数学研究所,北京 100080)

**提要** 本文主要讨论如下形式矩阵的逆特征值问题:

$$A_n=\begin{bmatrix}\alpha_1 & & & 0 & \beta_1\\ & \alpha_1 & & & \beta_L\\ & & \ddots & & \vdots\\ & 0 & & & \beta_{n-1}\\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} & \alpha_n\end{bmatrix}.$$

即对给定 $n$ 个实数 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n$ 与 $n-1$ 个实数 $\mu_1>\mu_2>\cdots>\mu_{n-1}$,满足 $\lambda_1>\mu_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_{n-1}>\mu_{n-1}>\lambda_n$,在 $\alpha_2>\alpha_3>\cdots>\alpha_{n-1}$ 的条件下,存在唯一的一个矩阵 $A_n$ 是以 $\lambda_i$ 为其特征值;且其截边矩阵

$$A_{n-1}=\begin{bmatrix}\alpha_2 & & & & \beta_2\\ & \alpha_3 & & 0 & \beta_3\\ & & \ddots & & \\ & 0 & & & \vdots\\ & & & & \beta_{n-1}\\ \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_{n-1} & \alpha_n\end{bmatrix}$$

的特征值为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{n-1}$.

**关键词**: 矩阵;逆特征值问题;算法
**美式分类号**: 15A54,65F05

矩阵逆特征值问题的提出往往都有其具体应用背景.在现代控制论的非线性调节系统中常会遇到如下形式的一类问题.

考虑有调节系统的扰动运动方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_k&=-\rho_k x_k+f(\sigma);k=1,2,\cdots,n-1,\\ \sigma&=\sum_{k-1}^{n-1}r_k x_k,\\ \dot{\sigma}&=\sum_{k=1}^{n-1}\beta_k x_k-rf(\sigma),\end{aligned}\tag{*}$$

式中,$\rho_k,r_k,\beta_k,r,(k=1,2,\cdots,n)$为已知数.

假设 $\rho_k(k=1,2,\cdots,n-1)$为互不相同的实数,且研究李亚普诺函数

* 收稿日期:1990-3-4

$$V=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}x_k^2+R\int_0^{\sigma}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

其中，$R$ 为正常数，它的全微商可按方程（ * ）算出，它是变量 $x_1,\cdots,x_{n-1},f(\sigma)$ 的二次型；即

$$\dot{V}=-\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k x_k^2-rRf^2(\sigma)+\sum_{k=1}^{n-1}(1+R\beta_k)x_k f(\sigma).$$

于是，研究系统（ * ）的性态，可化为讨论如下矩阵 $A_n$ 的性态，即

$$A_n=\begin{bmatrix}\rho_1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1+R\beta_1}{2}\\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 & -\frac{1+R\beta_2}{2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \rho_{n+1} & -\frac{1+R\beta_{n-1}}{2}\\ -\frac{1+R\beta_1}{2} & -\frac{1+R\beta_2}{2} & \cdots & -\frac{1+R\beta_{n-1}}{2} & rR\end{bmatrix}$$

矩阵 $A_n$ 是调节系统控制方程中的参数矩阵[1][2]；因此，讨论这类矩阵的逆特征值问题是有实际意义的．

## 1　基础知识与基本引理

令
$$A_n=\begin{bmatrix}\alpha_1 & & \cdots & & \beta_1\\ & \alpha_2 & & & \beta_2\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1}\\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} & \alpha_n\end{bmatrix},$$

则矩阵 $A_n$ 具有如下几个性质．

### 1.1　基本性质

1．若记

$$A_{n-i}=\begin{bmatrix}\alpha_{i+1} & & & \beta_{i+1}\\ & \alpha_{i+2} & & \beta_{i+2}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \beta_{i+1} & \beta_{i+2} & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix},$$

则 $\det(A_n)=\alpha_1\det(A_{n-1})-\beta_1^2\prod_{i=2}^{n-1}\alpha_i$.

如果 $\alpha_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n$，则有

$$\det(A_n)=\prod_{i=1}^{n-1}\alpha_i\Big[\alpha_n-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\beta_k^2}{\alpha_k}\Big].$$

2．若记　$D_i(\lambda)=\det(\lambda I-A_i)$，其中，I 为单位阵，则

$$D_n(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)D_{n-1}(\lambda)-\beta_1^2\prod_{i=2}^{n-1}(\lambda-\alpha_i),$$

$$D_{n-k}(\lambda)=(\lambda-\alpha_{k+1})D_{n-(k+1)}(\lambda)-\beta_{k+1}^2\prod_{i=k+2}^{n-1}(\lambda-\alpha_i),$$

$$1 \leqslant k \leqslant n-3.$$

3. 若矩阵 $A_n$ 可逆，且各 $\alpha_j \neq 0$，令

$$A_n = \begin{bmatrix} R & \beta^T \\ \beta & \alpha_n \end{bmatrix},$$

其中，$R = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1})$，　$\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-1})$，

则
$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-1} - \left(\dfrac{R^{-1}\beta^T\beta R^{-1}}{\beta R^{-1}\beta^T - \alpha_n}\right) & \dfrac{\beta R^{-1}}{\beta R^{-1}\beta^T - \alpha_n} \\ \dfrac{\beta R^{-1}}{\beta R^{-1}\beta^T - \alpha_n} & \dfrac{1 - \beta R^{-1}\beta^T}{\alpha_n(\beta R^{-1}\beta^T - \alpha_n)} \end{bmatrix}.$$

## 1.2 基本引理

**引理 1** 设 $D_n(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$，$D_{n-1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n-1}(\lambda - \mu_i)$，　(1)

其中，$\lambda_i (i=1,2,\cdots,n)$，$\mu_i (i=1,2,\cdots,n-1)$ 皆为实数，且满足

$$\lambda_1 > \mu_1 > \lambda_2 > \cdots \mu_{n-1} > \lambda_n; \tag{2}$$

又
$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i - \sum_{i=1}^{n-1}\mu_i, \tag{3}$$

则
$$f(\lambda) = D_n(\lambda) - (\lambda - \alpha_1)D_{n-1}(\lambda)$$

为 $n-2$ 次多项式，且有 $n-2$ 个不同的实根．

**证明**　由
$$D_n(\lambda) = \lambda^n - (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n}\lambda_i,$$

$$D_{n-1}(\lambda) = \lambda^{n-1} - (\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i)\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}\mu_i,$$

对多项式 $D_n(\lambda) - (\lambda - \alpha_1)D_{n-1}(\lambda)$，其 $\lambda^n$ 的系数为零，$\lambda^{n-1}$ 的系数为 $-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + \alpha_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\mu_i = 0$，由此可知

$f(\lambda) = D_n(\lambda) - (\lambda - \alpha_1)D_{n-1}(\lambda)$ 至多为 $n-2$ 次多项式．由(1)、(2)、(3)得

$$\left.\begin{aligned} f(\mu_1) &= (-1)\prod_{i=1}^{n}|\mu_1 - \lambda_i| < 0, \\ f(\mu_2) &= (-1)^2\prod_{i=1}^{n}|\mu_2 - \lambda_i| > 0, \\ &\cdots\cdots \\ f(\mu_k) &= (-1)^k\prod_{i=1}^{n}|\mu_k - \lambda_i|, \\ &\cdots\cdots \\ f(\mu_{n-1}) &= (-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}|\mu_{n-1} - \lambda_i|. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

由(4)式，应用连续函数的介值定理，知 $f(\lambda)$ 有 $n-2$ 个不同的实根，且这些根分别位于如下 $n-2$ 个不相交的区间之内，$(\mu_{n-1}, \mu_{n-2})$，$(\mu_{n-2}, \mu_{n-3})$，$\cdots$，$(\mu_2, \mu_1)$．由此得 $f(\lambda)$ 为 $\lambda$ 的 $n-2$ 次多项式，且有 $n-2$ 个不同的实根．证毕．

设此 $n-2$ 个实根为 $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \cdots, \bar{\lambda}_{n-2}$，那么不失一般性，可假设 $\bar{\lambda}_1 > \bar{\lambda}_2 > \cdots > \bar{\lambda}_{n-2}$，这在后面的讨论中要用到，故在此提及．

**引理 2** 令 $a_i (i=1,2,\cdots,n-2)$ 为 $n-2$ 个实数，$a_i \in (\mu_{i+1}, \mu_i)$，又

$$\beta = -D_{n-1}(a_1) / \prod_{i=2}^{n-2}(a_1 - a_i)，则$$

1）　$\beta>0$；

2）　存在着首 1 的 $n-2$ 次多项式 $g(\lambda)$，满足

$$D_{n-1}(\lambda)+\beta\prod_{i=2}^{n-2}(\lambda-a_i)=(\lambda-\alpha_1)g(\lambda),\tag{5}$$

且 $g(\lambda)$ 有 $n-2$ 个不同实根，分别位于

$(\mu_{n-1},\mu_{n-2}),(\mu_{n-2},\mu_{n-3}),\cdots,(\mu_2,\mu_1)$ 区间之内．

**证明**　由 $\mu_i>\mu_{i+1},i=1,2,\cdots,n-2$，知 $a_i>\mu_{i+1}>a_{i+1},i=1,2,3,\cdots,n-3$，可见　$\beta>0$.

将 $\lambda=a_i$ 代入 $D_{n-1}(\lambda)+\beta\prod_{i=2}^{n-2}(\lambda-a_i)$，得 $D_{n-1}(a_1)+\beta\prod_{i=2}^{n-2}(a_1-a_i)=0$，即 $D_{n-1}(\lambda)+\beta\prod_{i=2}^{n-2}(\lambda-a_i)$ 可以写成(5)式的形式．且易知 $g(\lambda)$ 为首 1 的 $n-2$ 次多项式．

将 $\lambda=\mu_i,i=1,2,\cdots,n-1$ 代入(5)式，由 $D_{n-1}(\mu_i)=0,\beta>0$，得：

$$g(\mu_k)>0,k\ 为奇数,\qquad g(\mu_k)<0,k\ 为偶数.$$

由介值定理知 $g(\lambda)$ 恰有 $n-2$ 个不同的实根，位于 $(\mu_{n-1},\mu_{n-2}),(\mu_{n-2},\mu_{n-3}),\cdots,(\mu_2,\mu_1)$ 区间之内．证毕．

## 2　$A_n$ 的逆特征值问题

### 2.1　逆特征值问题的提法

一个矩阵逆特征值问题的提出往往具有不同的背景与实际意义，且讨论不同形式特殊矩阵的解法时，可以提出各种形式的逆特征值问题[3]．由于 $A_n$ 只有 $2n-1$ 个自由变元，可与 Jacobi 矩阵的逆特征值问题[4]、[5]相似地提出如下逆特征值问题；

给定 $n$ 个实数 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots\lambda_n$ 与 $n-1$ 个实数 $\mu_1>\mu_2>\cdots>\mu_{n-1}$ 满足 $\lambda_1>\mu_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_{n-1}>\mu_{n-1}>\lambda n$，问是否存在一个形如(1)的矩阵 $A_n$ 满足 $\alpha_2>\alpha_3>\cdots>\alpha_{n-1},\beta_i>0(i=1,2,\cdots,n-1)$，且以 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为特征值，以 $\mu_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 为 $A_{n-1}$ 的特征值．

### 2.2　$A_n$ 逆特征值问题的解法

如下证明 2.1 中所提出的关于 $A_n$ 的逆特征值问题解的存在性与唯一性，　并给出其解法．

比较矩阵 $A_n$ 与 $A_{n-1}$；　由　$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i=\sum_{i=2}^{n}\alpha_i$ 得

$$\alpha_1=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i,\quad \alpha_1=\lambda_1+\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\mu_i)<\lambda_1.$$

由性质 2 及引理 1，

$$D_n(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)D_{n-1}(\lambda)-\beta_1^2\prod_{i=2}^{n-1}(\lambda-\alpha_i),\tag{6}$$

知 $\alpha_i(i=2,\cdots,n-1)$ 为多项式 $D_n(\lambda)-(\lambda-\alpha_1)D_{n-1}(\lambda)$ 的根，又由 $\alpha_2>\alpha_3>\cdots>\alpha_{n-1}$ 的条件及多项式 $D_n(\lambda)-(\lambda-\alpha_1)D_{n-1}(\lambda)$ 为已知多项式，即可求出其 $n-2$ 个根，再将这 $n-2$ 个根排序，就求得 $\alpha_i(i=1,2,\cdots n-1)$.

由　$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}=\sum_{i+1}^{n-1}\alpha_i+\alpha_n$，得 $\alpha_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i$.

将 $\lambda=\lambda_1$，代入(6)式，整理得

$$\beta_1^2=\frac{(\lambda_1-\alpha_1)D_{n-1}(\lambda_1)}{\prod_{i=2}^{n-1}(\lambda_1-\alpha_i)}.\tag{7}$$

上式右端大于 0，再由 $\beta_1>0$ 的限制，可解出 $\beta_1$.

由性质 2 与引理 2，可得

$$\beta_2^2=\frac{-D_{n-1}(\alpha_2)}{\prod_{i=3}^{n-1}(\alpha_2-\alpha_i)}. \tag{8}$$

由(8)式可解出 $\beta_2$，于是 $D_{n-1}(\lambda)+\beta_2^2\prod_{i=3}^{n-1}(\lambda-\alpha_i)$ 为已知多项式，且 $\lambda=\alpha_2$ 为其一根，由此

$$D_{n-2}(\lambda)=\frac{D_{n-1}(\lambda)+\beta_2^2\prod_{i=3}^{n-1}(\lambda-\alpha_i)}{\lambda-\alpha_2}$$

为一已知的 $n-2$ 次多项式，且其 $n-2$ 个根分别在区间 $(\mu_{n-1},\mu_{n-2}),\cdots,(\mu_2,\mu_1)$ 之内.

由递推关系

$$D_{n-k}(\lambda)=(\lambda-\alpha_{k+1})D_{n-(k+1)}(\lambda)-\beta_{k+1}^2\prod_{i=k+2}^{n-1}(\lambda-\alpha_i),\quad (1\leqslant k\leqslant n-3).$$

再反复应用引理 2，可依次求得

$$\beta_3,D_{n-3}(\lambda),\beta_4,D_{n-4}(\lambda),\cdots,\beta_{n-2},D_2(\lambda),$$

又由

$$D_2(\lambda)=\det\begin{vmatrix}\lambda-\alpha_{n-1} & \beta_{n-1}\\ \beta_{n-1} & \lambda-\alpha_n\end{vmatrix}=(\lambda-\alpha_{n-1})(\lambda-\alpha_n)-\beta_{n-1}^2,$$

得 $\beta_{n-1}^2=\alpha_{n-1}\alpha_n-D_2(0)$， $\beta_{n-1}=[\alpha_{n-1}\alpha_n-D_2(0)]^{1/2}$.

可见在 $\alpha_2>\alpha_3>\cdots>\alpha_{n-1}$ 的限制下，2.1 所提出的逆特征值问题的解是存在的，且由求解的构造过程中知解是唯一的．因此可以给出如下定理．

**定理** 给定 $n$ 个实数 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n$ 与 $n-1$ 个实数 $\mu_1>\mu_2>\cdots>\mu_{n-1}$ 满足 $\lambda_1>\mu_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_{n-1}>\mu_{n-1}>\lambda_n$，则存在一个唯一的矩阵：

$$A_n=\begin{bmatrix}\alpha_1 & & \cdots & & \beta_1\\ & \alpha_2 & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ & & & & \beta_{n-1}\\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} & \alpha_n\end{bmatrix},$$

$\beta_i>0,(i=1,2,\cdots,n-1),\alpha_2>\alpha_3>\cdots>\alpha_{n-1}$， $\alpha_1,\alpha_n$ 为实数，且满足 $A_n$ 以 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为特征值；

$$A_{n-1}=\begin{bmatrix}\alpha_2 & & \cdots & & \beta_2\\ & \alpha_3 & & & \beta_3\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ & & & & \beta_{n-1}\\ \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_{n-1} & \alpha_n\end{bmatrix}$$

以 $\mu_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 为特征值．

## 3 算法与算例

1. 输入 $\lambda_i,i=1,2,\cdots,n$， $\mu_i,i=1,2,\cdots,n-1$，

$$D_n(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i),$$

$$D_{n-1}(\lambda)=\prod_{i=1}^{n-1}(\lambda-\mu_i);$$

2. $$\alpha_1=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i;$$

3. 求解 $D_n(\lambda)-(\lambda-\alpha)D_{n-1}(\lambda)=0$,并将所求得的 $n-2$ 个根排序,得 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$;

4. $$\alpha_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i;$$

5. $$\beta_1=\left[\frac{(\lambda-\alpha_1)D_{n-1}(\lambda_1)}{\prod_{i=2}^{n-1}(\lambda_1-\alpha_i)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta_2=\left[-\frac{D_{n-1}(\alpha_2)}{\prod_{i=3}^{n-1}(\alpha_2-\alpha_i)}\right]^{\frac{1}{2}};\qquad(n>3)$$

6. 计算

$$D_{n-k}(\lambda)=\frac{D_{n-k+1}(\lambda)+\beta_k^2\prod_{i=k+1}^{n-1}(\lambda-\alpha_i)}{\lambda-\alpha_k},$$

$$\beta_{k+1}=\left[\frac{-D_{n-k}(\alpha_{k+1})}{\prod_{i=k+2}^{n-1}(\alpha_{k+1}-\alpha_i)}\right]^{1/2},k=2,3,\cdots,n-3,$$

$$D_2=\frac{D_3(\lambda)+\beta_{n-2}^2(\lambda-\alpha_{n-1})}{\lambda-\alpha_{n-2}},\beta_{n-1}=[\alpha_{n-1}\alpha_n-D_2(0)]^{1/2};$$

7. 输出 $\alpha_i,\ i=1,2,3,\cdots,n;\quad \beta_i,\ i=1,2,3,\cdots,n-1.$

**例1** $p-1$,其中 $n=3,\lambda_1=3,\lambda_2=2,\lambda_1=1;\mu_1=2.5,\mu_2=1.5$,则 $\alpha_1=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i-\sum_{i=1}^{2}\mu_i=2$, $D_3(\lambda)-(\lambda-2)D_2(\lambda)=-0.75\lambda-1.5$,得 $\alpha_2=2,\alpha_3=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i-\sum_{i=1}^{2}\alpha_i=2,\beta_1=\left[\frac{(\lambda_1-\alpha_1)D_2(\lambda_1)}{(\lambda_1-\alpha_2)}\right]^{1/2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又由 $D_2(\lambda)=(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\alpha_3)-\beta_2^2=(\lambda-1.5)(\lambda-2.5)$,得 $\alpha_2\alpha_3-\beta_2^2=2.5\times1.5,\beta_2=\sqrt{\alpha_2\alpha_3-2.5\times1.5}=0.25$,于是所求矩阵为

$$\begin{bmatrix}2&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&2&\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&2\end{bmatrix}.$$

**例2** $p-2$,其中 $n=4,\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=0,\lambda_4=-1,\mu_1=1.5,\mu_2=0.5,\mu_3=-0.5$,则 $\alpha_1=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i-\sum_{i=1}^{3}\mu_i=0.5,D_4(\lambda)-(\lambda-\frac{1}{2})D_3(\lambda)=-1.5\lambda^2+1.5\lambda+1.5\times0.5^2$.

解此方程得 $\alpha_2=\frac{1+\sqrt{2}}{2},\ \alpha_3=\frac{1-\sqrt{2}}{2},\ \alpha_4=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i-\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=0.5,\ \beta_1=\left[\frac{(\lambda_1-\alpha_1)D_3(\lambda_1)}{(\lambda_1-\alpha_2)(\lambda_1-\alpha_3)}\right]=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{7}},\beta_2=\left[-\frac{D_3(\alpha_2)}{(\alpha_2-\alpha_3)}\right]^{1/2}=\frac{1}{2},$

$$D_2(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)+\beta_2^2(\lambda-\alpha_3)}{\lambda-\alpha_2}=\lambda^2-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\lambda-\frac{\sqrt{2}}{4},$$

于是 $\alpha_3\alpha_4-\beta_3^2=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，解得　$\beta_3=\frac{1}{2}$，即所求矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{7}} \\ 0 & \frac{1+\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{7}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

## 参 考 文 献

1　A.M. 列托夫著・非线性调节系统的稳定性．科学出版社，1959.

2　高为炳著・非线性控制系统导论．科学出版社，1988.

3　宋增浩・逆特征值问题及其解法综述．全国第一次逆特征值问题研讨会，1986

4　Ole. H. Hald. Inverse eigenvalue problems for Jacobi matrices. Linear algebra and its application. 1976，14：63～85

5　C de Boor. The numerically stable reconstruction of a Jacobi matrix from spectral data. Linear algebra and its applications. 1978，21：245～260

# Inverse Eigenvalue Problem of a Special Kind of Matrices

*Xu Yinfeng* (徐寅峰)

(*Institute of Applied Mathematics*，*Academia Sinica*)

### Abstract

In this paper, we discuss the inverse eigenvalue problem of matrices as follow:

Let
$$A_n=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & & \beta_1 \\ & \alpha_2 & & \beta_2 \\ \vdots & & \ddots & \beta_{n-1} \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots \; \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

in which　$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ be real,

$$\beta_i (i = 1,2,\cdots,n-1) > 0.$$

Give the sequences $\lambda := (\lambda_i)_1^n$ and $\mu := (\mu_i)_1^{n-1}$ with

$$\lambda_i > \mu_i > \lambda_{i+1}, i = 1,2,\cdots,n-1,$$

under the condition $\alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > \alpha_{n-1}$, it is proved that there exists an unique matrix $A_n$ which has $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ as its eigenvalues and $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1}$ as the eigenvalues of $A_{n-1}$, in which

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & & & & & \beta_2 \\ & \alpha_3 & & & & \beta_3 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & \beta_{n-1} \\ & & & & \ddots & \\ \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \cdots & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

and the method of how to get the solution is given here.


**Keywords:** Matrix; Inverse Eigenvalue Problem; Algorithm