

图与其补图谱半径之间的关系*

徐寅峰

(西安交通大学管理学院, 西安, 710049)

摘要: 本文我们将图与其补图结合起来, 给出了图与其补图的谱半径所必须满足的两个不等式.

令 A 与 B 为 n 阶对称迹零的 $(0,1)$ 矩阵, $n \geq 2$, 且 $A + B = J_n^0$ (1)

其中 J_n^0 为主对角线元素为 0, 其它元素为 1 的 $n \times n$ 矩阵 (即, 矩阵 A 与 B 为图与其补图的邻接矩阵), $\rho(A), \rho(B)$ 为矩阵 A 与 B 的谱半径.

引理 1 令 A 为对称迹零的 $(0,1)$ 矩阵, A 中 1 的个数为 $2e$, 则

$$\rho(A) \leq (-1 + \sqrt{1 + 8e}) / 2 \quad (2)$$

证明 参见 [1], [2]

定理 1 $n - 1 \leq \rho(A) + \rho(B) < \sqrt{2n} - 1$

证明 首先证左边的不等式, 由矩阵理论, 有

$$\begin{aligned} \rho(A + B) &= \max_{x \in R^n} \frac{[(A + B)x, x]}{(x, x)} = \max_{x \in R^n} \left[\frac{(Ax, x)}{(x, x)} + \frac{(Bx, x)}{(x, x)} \right] \\ &\leq \max_{x \in R^n} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} + \max_{x \in R^n} \frac{(Bx, x)}{(x, x)} = \rho(A) + \rho(B). \end{aligned}$$

由 (1) 得 $\rho(A + B) = \rho(J_n^0) = n - 1$ 于是得到

$$n - 1 \leq \rho(A) + \rho(B). \quad (3)$$

再证右边的不等式, 由引理 1, 若设 A 中 1 的个数为 $2e$, 那么 B 中 1 的个数显然为 $n(n - 1) - 2e$, 且如下不等式成立

$$\rho(A) \leq (-1 + \sqrt{1 + 8e}) / 2, \quad \rho(B) \leq (-1 + \sqrt{1 + 4n(n - 1) - 8e}) / 2$$

且有 $\rho(A) + \rho(B) \leq -1 + (\sqrt{1 + 8e} + \sqrt{1 + 4n(n - 1) - 8e}) / 2$ (4)

如令函数 $f(x)$ 为 $f(x) = \sqrt{1 + 8x} + \sqrt{m - 8x}$ (m 为一常数, $m > 1$) 由函数 $f(x)$ 的极

* 收到日期: 1989-03-26

值性得

$$f(x) \leq 2\sqrt{(m+1)/2} \quad (5)$$

于是将(5)式应用于(4)式 得

$$\rho(A) + \rho(B) \leq -1 + \sqrt{1 + 2n^2 - 2n} = -1 + \sqrt{n^2 + (n-1)^2} < -1 + \sqrt{2n}.$$

做为定理 1 的一个推论 有

定理2 $\rho(A) \cdot \rho(B) < n(n - \sqrt{2}) / 2 + (1/4).$

问题 如今 $\rho(A) + \rho(B) \leq cn - 1$, 其中 c 为常数, c 可否小于 $\sqrt{2}$?

参 考 文 献

1. R. A. Brualdi and A. J. Hoffman: *On the spectral radius of $(0,1)$ - matrices*, Linear Algebra Appl 65: 133-146 (1985).
2. Richard P. Stanley, *A bound on the spectral radius of graphs with a edges*, Linear Algebra Appl. 87: 267-269 (1987).

RELATIONSHIP BETWEEN THE SPECTRAL RADIUS OF GRAPHS AND ITS COMPLETEMENTS

Xu Yin Feng

(Xian Jiaotong University, Xian, 710049)

Abstract. In this paper we link graphs and its complements and two inequalities that the spectral radius of graphs and its complements must satisfy are given here.

Keywords. Graph, Complement graph, Radius of graphs.

1991 Mathematics Subject Classification. 05C99.