第9卷A辑第4期　高校应用数学学报　Vol. 9Ser. ANo. 4
1994 年 12 月 Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities Dec. 1994

关于最大权 k-子集分拆问题*

徐寅峰　刘自成

（西安交通大学）（中国科学院）

摘　要

对给定规模为 n 的集合 S，其每一个规模至多为 k 的子集对应一个权．本文研究如何将 S 分为 $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ 个互不相交的规模至多为 k 的子集且满足权和最大的问题．我们证明了该问题当 $k=2$ 时是多项式时间可解的；当 $k \geqslant 3$ 时为 NP- 完全的；同时给出了一个 $O(n^{k+1})$ 时间的启发式算法，所得到的解与最优解之比不小于 $1/k$．

关键词　分拆，NP- 完全，3 维匹配问题，启发式算法．

分类号　(AMS)68C25.

§1　引　言

最大权 k- 子集分拆问题源于经济问题和工业问题，某些组合优化问题也可以化为这一模型．在经济问题中，如下问题是经常要考虑的，由 n 个工厂组成一些公司，由于产品的结构与加工工艺等多方面的原因，要求每个公司至多由 k 个工厂组成．为了减少管理方面费用，要求公司的个数尽可能地少，于是取公司的个数为 $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$，其中 $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil = \min\{x \mid kx \geqslant n, x$ 为一个整数$\}$．由于不同的组合产生不同的利润，我们考虑如何将这些工厂组合成 $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ 个公司以求利润之和最大．这一问题就可以抽象地化为最大权 k- 子集分拆问题．

记 N 为 n 个工厂的集合，N 的每个子集合称为公司．对每个公司 S，令 $\omega(S)$ 为此公司所产生的利润，$n = |N|$（N 中元素的个数），于是问题可表述如下：

$$\max \sum_{i=1}^{\lceil n/k \rceil} \omega(S_i)$$

* 本文 1992 年 12 月 28 日收到．

满足

$$\bigcup_{i=1}^{\lceil n/k\rceil} S_i = N,$$
$$S_i \cap S_j = \varnothing,\quad i \neq j$$
$$|S_i| \leqslant k,\quad i = 1,2,\cdots,\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil.$$

在油田的油井网络设计中存在类似的问题，有 n 个油井需要在其周围建立起一些原油提炼厂．由于技术方面的原因，一个提炼厂至多能容纳 k 个油井．提炼厂一般称为容量为 k 的集中点．在油井和提炼厂之间有管线联接，每个油井仅属于一个提炼厂．为减少建提炼厂的费用，提炼厂的个数一般取为 $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$．问题是如何确定油井和提炼厂的所属关系以使总的费用最小．文献[1]提出并研究了这一问题，主要讨论了近似算法的设计以及实际问题中的一些其它约束．实际上此问题与上面所提的经济中的问题可以通过一个转换化为同一个问题．

§2　记号与假设

对给定一个集合 N，记 2^N 为 N 的所有子集的集合．$V \subseteq 2^N$ 称为 N 的一个 k-子集分拆，仅当

(1) $|S| \leqslant k,\quad S \in V$,

(2) $S_1 \cap S_2 = \varnothing$，任 $S_1, S_2 \in V$ 且 $S_1 \neq S_2$,

(3) $|V| = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$,

(4) $\bigcup_{S\in V} S = N$.

记 $\omega(S)$ 为满足 $|S| \leqslant k$ 的子集 S 的权，于是最大权 k-子集分拆问题即为在 N 的所有 k-子集分拆上求一个 k-子集分拆 V 使得 $\sum_{S\in V}\omega(S)$ 达到最大．

如上的(1)—(4)式略显复杂．如果 n 恰为 k 的倍数，则(1)式化为 $|S| = k, S \in V$；(3)式化为 $|V| = \frac{n}{k}$．容易证明 n 不是 k 的倍数的情形可以转化为 n 是 k 的倍数的情形．实际上，假设 $n = mk + l$，其中 $1 \leqslant l \leqslant k-1$，在集合 N 中加入 $k-l$ 个新的元素可得到一个新的集合记为 N^*．于是 $|N^*| = (m+1)k$．对任 $S \subset N^*$，取 $\omega^*(S) = \omega(S \cap N)$ 为 S 的权，则有

$$\max_V \sum_{S\in V}\omega(S) = \max_{V^*} \sum_{S\in V^*}\omega^*(S),$$

其中 V, V^* 分别为 N 和 N^* 的 k-子集分拆．在以下讨论中，如无特殊说明则总假设 n 为 k 的倍数，且将最大权 k-子集分拆问题简记为 kSP.

§3　$k = 2$ 的情形

令 $N = \{x_1, x_2, \cdots, x_{|N|}\}$，$\omega_{i,j}$ 为 N 的子集合 $\{x_i, x_j\}$，$i \neq j$ 的权，G 为以 $x_1, x_2, \cdots, x_{|N|}$ 为

顶点的完全图，点 x_i 与 x_j 之间的边的权为 $\omega_{i,j}$. 注意到此时 $|N|$ 为偶数，则显然有 N 的最大权 2-子集分拆恰好对于加权图 G 的最大权匹配. 由于一个完全图的最大权匹配可在 $O(n^4)$ 时间内求出(参见[2])，其中 n 为图的顶点的个数，于是我们有如下结果;

定理 1　集合 N 的 $2SP$ 可在 $O(|N|^4)$ 时间内算出.

§4　$k \geqslant 3$ 的情形

下面我们将证明当 $k \geqslant 3$ 时 kSP 为 NP-完全的. 首先看一下已被证明是 NP-完全的 3-维匹配问题[3].

3-维匹配问题(简记为 $3DM$).

例子　一个集合 $M \subseteq W \times X \times Y$，其中 W, X 和 Y 为具有相同元素个数的不相交集合.

问题　是否存在 M 的一个子集 $M' \subseteq M$，满足 $|M'| = n$ 且对任 (u,v,w) 与 (u',v',w') 属于 M'，为不同的 M' 中的元素，满足 $u \neq u', v \neq v', w \neq w'$.

为证明 $3SP$ 为 NP-完全，我们首先证明如下引理.

引理　$3DM$ 可多项式归约为 $3SP$.

证明　给定一个 $3DM$ 的例子，可以构造一个 $3SP$ 的例子如下:

令 $N = W \cup X \cup Y$，对 N 中的任一个含 3 个元素的子集 S 定义它的权为

$$w(S) = \begin{cases} 2, & S \in M，\text{即 } S \text{ 含 } W,X,Y \text{ 中各一个元素}, \\ 1, & \text{否则}, \end{cases}$$

其中 $M \subseteq W \times X \times Y$. 易见如上构造可在多项式时间内完成. 接下来我们证明 M 包含一个 3-维匹配当且仅当 N 有一个 3-子集分拆满足

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(S_i) \geqslant 2n.$$

实际上，如果 M' 为 M 的一个匹配，那么 M' 恰含 n 个 M 的 3-元素不相交子集. 于是 M' 为 N 的一个 3-子集分拆且 $\sum_{S \in M'} \omega(S) = 2n$. 反之，假设 N 有一个 3-子集分拆 V，且满足 $\sum_{S \in V} \omega(S) \geqslant 2n$. 于是 V 必含 n 个 N 的 3-元素子集合且有 $\omega(S) = 2, S \in V$. 由此可知对 $S \in V$ 有 $S \in M$. 即 V 为 M 的一个匹配. 证毕.

由于 $3SP$ 可以用引理中类似的构造方法归约为 $kSP, k \geqslant 3$. 我们有如下推论.

推论　对 $k \geqslant 3$，$3DM$ 可多项式归约为 kSP.

应用以上讨论可得如下结论;

定理 2　对 $k \geqslant 3$，kSP 为 NP-完全的.

证明　对于集合有限集合 N，我们可以很容易地检验 N 的 n/k 个子集是否构成 N 的一个 3-子集分拆. 于是 $kSP \in NP$，由推论即得 kSP 为 NP-完全的，其中 $k \geqslant 3$.

§5 对 $k \geqslant 3$ 情形的启发式算法

由定理 2 我们知道当 $k \geqslant 3$ 时 kSP 为 NP- 完全的，于是我们考虑求解 kSP 的启发式算法．贪心算法是一般的组合优化问题启发式算法最优先考虑的一个启发式算法．由于 kSP 问题的特殊结构，在后面给出的定理 3 中我们可以得到由贪心算法求 kSP 问题所得到的解的一个比较好的性质．首先我们给出用拟 Algol 语言所写的对应于 kSP 问题的贪心算法：

```
begin
    T : = {S|S ⊂ N, |S| = k};
    V : = ∅;
    While |V| < n/k  do
        begin
            choose S_0 ∈ T such that
                ω(S_0) = max_{S∈T} ω(S);
            V : = V ∪ {S_0};
            T : = {S|S ∩ S_0 = ∅, S ∈ T};
        end;
    output V;
end.
```

分析如上的贪心算法可得：

定理 3 贪心算法求解 kSP 可在 $O(n^{k+1})$ 时间内完成，且所得的解与 kSP 的最优解之比大于或等 $1/k$，其中 n 为输入集合 N 中元素的个数．

证明 令 $n = |N|$，如上的贪心算法中的 T 至多含 $\binom{n}{k}$ 个元素，由于算法计算 n/k 个具有局部极大权的 S_0，所以总的运算次数至多为 $O(n^{k+1})$. 于是定理 3 中关于算法运算量部分的结论成立．接下来考虑贪心算法所得到解的性质；假设 $V = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$ 为 N 的 kSP 的最优解，$V^* = \{S_1^*, S_2^*, \cdots, S_m^*\}$ 为贪心算法的输出，且不失一般性可以设 $\omega(S_1^*) \geqslant \omega(S_2^*) \geqslant \cdots \geqslant \omega(S_m^*)$，其中 $m = n/k$. 令

$$E_i = \{S | S \in V, S \cap S_i^* \neq \varnothing, \text{且 } S \cap S_j^* = \varnothing, \text{对 } j < i \text{ 成立}\}, i = 1, 2, \cdots, m.$$

于是有 E_i 包含至多 k 个元素，且若 $S \in E_i$，则显然有 $\omega(S) \leqslant \omega(S_i^*)$，$i = 1, 2, \cdots, m$ 成立．由下式

$$\sum_{i=1}^{m} \omega(S_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{S \in E_i} \omega(S) \leqslant \sum_{i=1}^{m} k\omega(S_i^*),$$

得

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \omega(S_i)}{\sum_{i=1}^{m} \omega(S^*)} \leqslant k .$$

于是定理的第二部分得证．

[注:如上定义的 E_i 当 i 较大时有可能是空集].

(本文第一作者通讯地址:西安交通大学管理学院 邮码 710049)

参 考 文 献

[1] 陈德泉等,原油集输系统规划优选研究,优选与管理科学,**3**:3(1987),1-8.

[2] Avis, D., A survey of heuristic for the weighted matching problem, Networks, **13**:4(1983), 475-494.

[3] Garey, M. P. and Johnson, D. S., Computers and Intractability, A guide to the theory of NP-completeness, Freeman, San Francisco, CA, 1979.

ON MAXIMUM WEIGHT K-SUBSET PARTITION PROBLEMS

Xu Yinfeng　　Liu Zicheng

(Xi'an Jiaotong University)　*(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica)*

Abstract

Given a set S of size n, each of its subsets of size at most k is assigned a weight. The problem is to divide S into $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ pairwise disjoint subsets, each of size at most k, such that the total weight is maximum. In this paper, the problem is proved to be polynomially solvable for $k=2$ and NP-complete for $k \geqslant 3$. Furthermore, we show that a bounded heuristic for $k \geqslant 3$ within a factor k from optimum can be computed in time $O(n^{k+1})$.

Key Words Partition, NP-Complete, 3-dimensional Matching Problem, Heuristics.

Subject Classification (AMS)68C25.