矩阵逆特征值问题
— 问题的提法及方法介绍

徐寅峰　王众臣　李　清

(西安交通大学管理学院)　(青岛冶金矿山大学)　(理工学院)

提要　本文综合了各种矩阵逆特征值问题的提法,简要介绍了求解矩阵逆特征值的方法,并结合非负矩阵与图论知识,给出几个有待进一步解决的问题.

关键词　矩阵　逆特征值

一　引　　言

随着科学技术的发展,最优控制、参数识别等均需要更为有效的数学工具.通常,对一个给定的控制系统,我们要判别其相应的性态,即判别系统的特征分布.而现在往往提出这样的问题,即在予先给定系统所必须满足的性态的条件下,怎样去设计系统所应具有的参数.这就是所谓的逆特征值问题.矩阵逆特征值问题一般是指在给定矩阵所具有的特征值(或部分特征值)及矩阵中的一些元素而反求矩阵中未知元素的问题.这一问题的研究从60年代至今已有很大的进展,并在许多领域起着极为重要的应用,同时在数学领域的其它分支中也得到应用和发展.

矩阵逆特征值问题大体上可分为以下几个部分

一、逆特征值问题的提法

二、逆特征值问题可解性的证明

三、逆特征值问题解的构造

四、与逆特征值问题有关的问题

以下仅就这几个方面逐一介绍.

二　矩阵逆特征值问题的提法

一个矩阵逆特征值问题的提出一般都有它的实际背景或相应的数学背景,所以矩阵逆特征值问题的提法多种多样,针对于不同的实际问题可以提出其对应的逆特征值问题.这里给出几种矩阵逆特征值问题的提法.① 非负矩阵逆特征值问题.② Jacobi矩阵逆特征值问题.③ 鲁棒问题.④ 其它有关的逆特征值问题.

* 国家自然科学基金资助课题

收稿日期: 1994-02-25

2.1 非负矩阵的逆特征值问题

p1.1 对给定的一组数$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$(可以是实数也可以是复数),问这组数在满足什么样的条件下,才能存在一个n阶实非负方阵以这n个给定的数为其特征值.

p1.2 给定数集$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n | a_1, a_2, \cdots, a_n)$,其中$\lambda_2, \lambda_2 \cdots, \lambda_n$和$a_1, a_2 \cdots, a_n$都认为是无序的且$\lambda_i \geqslant 0$, $a_i \geqslant 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$.问是否存在一个非负矩阵A,满足$a_{ii}=a_i$, $\lambda_1=P(A)$,且以$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$为特征值,其中P(A)表示矩阵A的谱半径.

关于非负矩阵的概念与理论以及关于问题p1.1, p1.2的几个定理可参见文献[1].

2.2 Jacobi矩阵逆特征值问题

在Jacobi矩阵逆特征值问题中的Jacobi矩阵是指如下形式的矩阵

$$J_n=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} b_i>0 \quad a_i \text{为实数} \\ (i=1, 2, \cdots, n) \end{matrix}$$

由于Jacobi矩阵形式简单,仅含$2n-1$个非零元素,且Jacobi矩阵为工程实际中经常出现的一个矩阵,所以关于Jacobi矩阵逆特征值问题的提法与解法可参见许多文献,并在实际工程技术中得到了很大的应用,近年来国内学者关于Jacobi矩阵逆特征值问题的文章也时常可见.下面给出Jacobi矩阵逆特征值问题几种常见的提法.

p2.1 给定两组实数$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$和$\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$满足$\lambda_i<\mu_i<\lambda_{i-1}$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$,问是否存在一个$n\times n$阶Jacobi矩阵J_n以λ_i, $(i=1, 2, \cdots, n)$为其特征值,且以μ_i, $(i=1, 2, \cdots, n-1)$为J_{n-1}的特征值.

p2.2 给定n个实数λ_i, $i=1, 2, \cdots, n$,问是否存在一个$n\times n$阶Jacobi矩阵J_n以λ_i, $(i=1, 2, \cdots, n)$为J_n的特征值,且J_n的元素满足$a_1=a_{n-1}$, $b_1=b_{n-1}$ $(i=1, 2, \cdots, [\frac{n}{2}])$,其中[x]表示对实数x下取整.

p2.3 给定n个不同实数$\lambda_i(i=1, 2, \cdots, n)$和$n-1$个元素$a_1, a_2, \cdots, a_{[n/2]}, b_1, b_2, \cdots, b_{[(n-1)/2]}$,问这些数据是否可以确定一个$n\times n$阶Jacobi矩阵$J_n$.

p2.4 给定两组实数$\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n$, $\gamma_1>\gamma_2>\cdots\gamma>\gamma_n$且满足$\gamma_1>\lambda_1>\gamma_2>\cdots>\gamma_n>\lambda_n$,问是否存在两个$n\times n$阶Jacobi矩阵$J_n^{(1)}$, $J_n^{(2)}$,它们的特征值分别为$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$和$\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$,且$J_n^{(1)}$与$J_n^{(2)}$的元素之间满足$a_i^{(1)}=a_i^{(2)}=$, $b_i^{(1)}=b_i^{(2)}$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$即它们只有第n个主对角元素不同.

Jacobi矩阵逆特征值问题的提法主要有以上几种,关于这几个问题可参阅文献[2]、[3]、[4]、[5]、[6].

2.3 鲁棒问题

鲁棒问题是线性多变量控制理论中输出反馈极点配置所提出的一个矩阵逆特征值问题.下面给出其具体提法:

p3.1 给定 $A\in R^{n\times n}$, $B\in R_m^{n\times m}$ $C\in R_p^{p\times n}$ 和 $\lambda=\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, 若 $\lambda_i\in\lambda$, 则 $\bar{\lambda}_i\in\lambda$, 求 $K\in R^{m\times p}$ 和非奇异的 $n\times n$ 阶矩阵满足

$$(A+B+C)X=X\Lambda$$

其中 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$,

使得矩阵 $A+BKC$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 对于矩阵 $(A+BKC)$ 中的元素的扰动尽可能地不敏感.

关于鲁棒问题可参阅文献[7].

2.4 其它有关问题

p4.1 给定 Hermition 矩阵 A, 问是否存在一个实非奇对角矩阵 D 使得方程 $|A-\lambda D^2|=0$ 有予先给定的根.

p4.2 给定 Hermition 矩阵 A, 问是否存在一个实对角阵 D 使 A+D 有予先给定的特征值.

p4.3 令 $A=A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 为 n 个参数 $p_1, p_2\cdots, p_n$ 的解析函数的 $n\times n$ 矩阵,问是否可以确定 $p_1, p_2, \cdots$, 使 A 具有予先给定的特征值, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

p4.4 令 $A_i=(a_{jk}^i)$ 为实矩阵 $(i=0, 1, \cdots, n)$, $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)^T\in R^n$, 问是否存在 $c=(c_1, c_2, \cdots, c_n)^T\in R^n$, 满足 $A(c)=A_0+\sum_{i=1}^{n}c_iA_i$ 有给定的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

以上几个问题可参阅文献[8]、[9]、[10]、[11]、[15]、[16]

三 矩阵逆特征值问题可解性的证明

判别一个矩阵逆特征值问题是否可解往往是比较困难的,若条件给的不适当,问题很可能是无解的.一般说来,一个逆特征值问题的解的存在性总可以化为某一非线性方程组是否可解的问题.而对非线性方程组的可解性证明虽然有许多方法.(如不动点理论,牛顿算法,非扩张方法等)但对于一个具体的非线性方程其是否可解还是很不易判断的,文献[1.2]、[1.3] 讨论两类逆特征值问题是几乎处处不可解的.

四 矩阵逆特征值问题解的构造

由于矩阵逆特征值问题的提出一般都是有具体实际模型的(如振动模型、控制模型等),而对于一些实际模型,其解的存在是可以肯定的,在已知矩阵逆特征值问题的解存在的前提下,怎样求出具体的解就属于解的构造的问题了.对于解的构造一般只适用于解存在唯一的情况下,对许多问题求出其具体的解是极为困难的,尽管解是存在的.正象非线性方程组,虽然可以通过有效的方法知道其解的存在,但要具体求出其解也是相当困难的.目前关于矩阵逆特征值问题解的构造,人们的主要工作是 Jacobi 矩阵逆特征值问题解的各种构造方法.并在一定的程度上讨论了解构造过程的数值稳定性.

由于叙述一个矩阵逆特征值问题解的具体构造方法及过程需要较多的篇幅,故在此不谈某个问题具体构造解的过程.可参阅[2]、[3]、[5]、[6].

五 与逆特征值问题有关的问题

在矩阵逆特征值问题中有许多未解决的问题,这里不防认为是猜想(conjecture),现就文献中所见到的以及一些问题的进一步研究中所出现的问题提出来供有兴趣在这方面进一步工作的人参考.

C5.1 如$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$为一非负阵的特征值集合，其中$\lambda_i$为实数，问是否在一个$n\times n$阶非负对称阵以$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$为特征值集合.

C5.2 如$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$为一非负阵的特征值集合，$\lambda_i$不一定为实数$(i=1, 2, \cdots, n)$，问是否存在一个正规非负阵以$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$为特征值集合.

C5.3 若p_n为所有$p(\lambda)$的多项式集合，其中$p(A)$对全体$n\times n$阶非负阵A为非负阵，问集合P_n的特征是什么？

C5.4 令A_n为n阶对称矩阵，A_{n-1}为A_n去掉第一行第一列的$n-1$阶子阵，$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$为$A_{n-1}$的特征值，若已知$A_{n-1}$，且给定n个实数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$满足$\lambda_1\geqslant\mu_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_{n-1}\geqslant\lambda_n$，问是否存在这样的阶对称阵$A_n$，以$\lambda_i(i=1, 2, \cdots, n)$为特征值且以$A_{n-1}$为$n-1$阶主子阵 .

C5.5 若令λ_i为实数$(i=1, 2, \cdots, n)$，且$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=0$，问是否存在一个含有n个顶点的图G.满足图G的邻接矩阵$A(G)$以λ_i为特征值.

C5.6 若令λ_i为实数$(i=1, 2, \cdots, n)$，且$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i=0$，问是否存在一个含有n个顶点的树T(图论中的概念)，满足树T的邻接矩阵$A(T)$以λ_i $(i=1, \cdots, n)$为特征值.

C5.7 若令λ_i为实数$(i=1, 2, \cdots, n)$，且$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=0$，问是否存在一个含有n个顶点的平面图G，满足图G的邻接矩阵$A(G)$以λ_i为特征值.

C5.8 若令λ_i为实数$(i=1, 2, \cdots, n)$，且$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=0$，$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\neq0$且已知$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$为一图G的邻接矩阵的特征值集合，问图G有何特征.

以上几个问题有的略有进展，有的几乎无任何结果，问题的提出可参阅文献[1]及[14].

参 考 文 献

[1] A.Berman, R.J.Plemmons, Nonnegative Matrices In The Mathematical Sciences, Computer Scie－nce and Applied Mathematic, 1979

[2] Harry Hochstadt, On the Construction of a Jacobi Matrix from Spectral Data, Linear Algebra and its Applications 8, 435－446 (1974)

[3] H.Hochstadt, On the Construction of a Jacobi Matrix from Mixed Given Data, Linear Alge－bra and its Applications, 28, 113－115 (1979)

[4] 蒋尔雄 对称矩阵计算 上海科技出版社 1984

[5] Ole H. Hald, Inverse eigenvatue problem for Jacobi matrices, Linear Algebra Appl. 14: 63－85 (1976)

[6] C.de Boor and G. H. Golub, The, numerically stable reconstruction of a Jacobi matrix from spectral data Linear Algebra Appl 21: 245－260 (1978)

[7] 陈春晖 关于鲁棒的输出反馈极点配置问题的算法，计算数学 1, 59－67 (1986)

[8] 宋增浩 逆特征值问题及其解法综述，全国第一次逆特征值问题讨论会论文，1986

[9] Friedrich W.Biegler－König Sufficient conditions for the solubility of Eigenvalue Problems, L－

inear Algebra App .40, 89－100 (1981)
[10] F. Concelgão silva Matrices With Prescribed Eigenvalues and Principal Submatrices, Linear Al－gebra Appl. 92, 241－250(1987)
[11] H.Hochstadt. On some Inveres Problems in matrix theory, arch. Math. 18. 201－207 (1967)
[12] A. Shapiro, On the Unsolvability of Inverse Eigenvalues Problems Almost Everywhere, Linear Algebra Appl, 49, 27－31 (1983)
[13] 孔继广，叶强 The Unsolability of inverse dgebraic eigenvalue problems almost everywhere J. Comp. Math
[14] Lowell W.Beneke and Robin J.Wilson, Selected Topics in Graph Theory 307－336 Academic press INC (Lon－don) LTD 1978
[15] A. C. Downing Jr; A. S. Householder, Some Inverse Characteristic Vatue Problems, J.Acm. Vol. 3. 203－207 1956
[16] 2. Bohte, Numerical Sotution of the Inverse Algebraic Eigenvalue Problem, the Computer Jo－urnal. Vol.10 383－388 1968

Inverse Eigenvalue Problem of Matrix

－fomulation of problems and method introduction

Xu Yinfeng Wang Zhongchen

(Management sehool of Xina Jiaotong Univeosity) *(Met. and Min. University of Qingdao)*

Li Qing

(Institute of Technologg of Yanbian University)

Abstract In this paper, we sum up various kinds of fomulation of the inverse eigenvalue problem of matrix ,recommend the method of how to solve the problems and gives some further research p－roblems with the knowlege of nonnegative matrix and graph theory.

Keywords Matrix Inverse eigenvalue