第29卷 第8期 西安交通大学学报 Vol. 29 №8
1995年8月 JOURNAL OF XI' AN JIAOTONG UNIVERSITY Aug. 1995

关于有限平面点集的角控集

徐寅峰 汪应洛
(管理学院)

摘 要

对一给定有限平面点集 S 与一个实数 α 满足 $0<\alpha<2\pi$，S 的最大子集 S_α 满足对任 $x\in S_\alpha$，存在一个以 x 为中心且夹角不小于 α 的两条射线使得由两条射线为边界的无界区域内不存在 S 中的点，称 S_α 为 S 的 α 角控集. 文中首先给出了 S_α 的几个基本几何性质，同时给出了计算 S_α 的算法.

关键词：离散计算几何 凸壳 角控集 算法 计算复杂性

中国图书资料分类法分类号：O24

0 引 言

在机械检测的过程中时常出现某些部件是否可用角规仪器探测的问题. 这类问题可化为如下离散计算几何中的问题：

给定一个有限平面点集 S 与一个角度 α 满足 $0<\alpha<2\pi$，求 S 的最大子集 S_α，满足对任意 $x\in S_\alpha$，存在以 x 为中心的两条射线，使得在两条射线夹角不小于 α 的无界区域内不存在 S 中的点.

在数理统计、经济、军事以及运筹学研究中，如上问题亦有应用背景[1]. 称 S_α 为 S 的 α 角控集. 求 S_α 的问题可以看作是离散计算几何中点集最大问题的一个推广.

1 S_α 的基本几何性质

对给定的有限平面点集 S，令 $CH(s)$ 为 S 的凸壳（包含 S 的最小凸集合的边界），$V(s)$ 为 $CH(s)$ 的顶点集，$L(s)$ 为 $CH(s)$ 线段集合. 为讨论方便，以下假设 S 为简单平面点集（即 S 中无三点共线）. 如 $\alpha\geqslant\pi$，则显然有 S_α 为 $V(s)$ 的一个子集. 如 $\alpha=\pi$，S_α 恰为 $V(s)$. 以下我们主要讨论 $0<\alpha<\pi$ 的情形.

如 $\alpha<\pi$，对 $L(s)$ 中的任一线段 l，构造 $CH(s)$ 内部的一弓形区域 $R_\alpha(l)$ 如下：令 $C_\alpha(l)$ 为弓

收到日期：1993-12-09. 徐寅峰：男，1960年6月生，管理学院，博士后.

形区域圆形边界且满足角 $AC^*B=\alpha$,其中 A、B 为 l 的端点(见图1),C^* 为 $C_\alpha(l)$ 上的任一点.若记 $R_\alpha(s)=\bigcup\limits_{l\in L(s)} R_\alpha(l)$,则显然有

性质1 $S_\alpha \subset S \cap R_\alpha(s)$

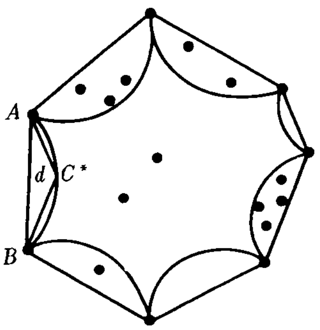

图1 弓形区域图

下面给出有限平面点集的最大角控集与离散计算几何中的点集最大问题之间的关系.点集最大问题最初是为了描述"浮动通货问题"[1]:在一个假想为 Erehwon 的地方,每一个公民有一张外汇有价证券.这些外汇的价值随意变动,以致每一晚上有价证券具有最大累加值的人被表明为 Erehwon 的企业界巨头.问如何求出所有可能的企业巨头的人口的最小子集?该问题的精确数学定义为:令 S 为 d 维空间 E^d 的一个有限点集合.S 中的点用 $p(x_1,\cdots,x_d)$ 表示,其中 $x_i,i=1,2\cdots,d$,为坐标分量.若对于 $i=1,\cdots,d,x_i(p_2)\leqslant x_i(p_1)$,称 p_1 优于 p_2,记为 $p_2<p_1$.对于 $d>1$,S 上的优势关系为一个偏序.若 S 中不存在点 q,使得 $p\neq q$,且 $q>p$,则 S 中的 p 称为 S 的一个最大元素.点集最大问题是在优势关系下求 S 的所有最大元素组成的集合 $N(s)$.

在平面点集的情况下,显然有 $V(s)\subset M(s)$,其中 $M(s)$ 为 S 的所有可能的最大元素组成的集合(见图2).关于 $N(s)$ 以及高维空间中的 $N(s)$ 的算法方面有许多的讨论[2][3][4].在平面与三维空间时,求 $N(s)$ 的固有复杂度为 $0(nlogn)$ 其中 $n=|s|$.

点集最大问题显然与集合 S 中的点所在的坐标系有密切关系.在平面直角坐标下,如下包含关系显然成立:

$$M(s)\subset S_{\frac{\pi}{2}} \qquad (2)$$

如果我们选用仿射坐标或将坐标轴旋转,那么 S 的最大的集合往往会随之改变.如果仅用移动坐标原点和旋转坐标轴两种运算.那么在直角坐标下 $N(s)$ 的所有集合的并恰为 $S_{\frac{\pi}{2}}$.尽管 $M(s)$ 在一定程度上可以刻画集合 S 的一个粗略的边界(见图2),但它与 S 的凸壳 $CH(s)$ 以及 S 的角控集 S_α 有明显的不同,因为后两者是取与 S 中点的相互位置有关的量而与坐标的选取毫无关系.

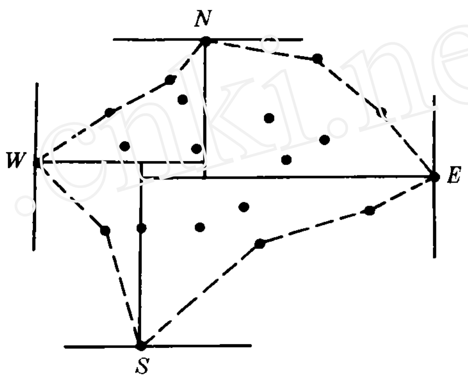

图2 在由四个极值点 N、S、E 和 W 所定义的象限中,最大元素提供了点集边界的一个粗略的表示

性质2 S_α 与 S 坐标无关.

2 算 法

由 S_α 的性质2,对一给定的 $0<\alpha<2\pi$,计算 S_α 的算法一般要比计算 $M(s)$ 的算法复杂.为此我们首先给出一个对任意 $0<\alpha<2\pi$ 的 α,计算 S_α 的一个平凡算法.

对于 $P\in S$,考虑点 P 与 S 中其它点相通连所组成的线段集合,记这个线段集为STAR

(p). 将 STAR(p)逆时针排序,于是 STAR(p)将 p 点处的 2π 角度分为$|S|$-1 个扇形或角区间,其$|S|$表示 S 中点的个数. 令$|S|=n$,$A(p)$为 n-1 个角的最大角度,由排序算法[5]可知计算 $A(p)$需要 $0(n\log n)$时间. 令 $A(s)=\{A(p);p\in S\}$,若 $A(s)$已知,那么对于任意 $0<\alpha<2\pi$,S_α 可在 $0(n)$时间内算出. 于是如下定理成立:

定理 1　对任意给定的 $0<\alpha<2\pi$,S_α 可在 $0(n^2\log n)$预处理时间的基础上用 $0(n)$时间算出.

由 S_α 的性质 1,在 S 中点的分布比较特殊的情况下,可以设计出运转快速的算法,但就一般情形而言,低于 $0(n^2\log n)$时间的算法还没有设计出来. 若 $\alpha\geqslant\pi$,由于 S_α 此时为 $V(s)$的一个子集,这时可用如下方法设计一个 $0(n\log n)$时间的算法来计算 S_α.

引理 1[1]　若 S 为一简单有限平面点集,那么计算 $V(s)$的固有复杂度为 $0(n\log n)$.

计算 $\alpha\geqslant\pi$ 情况下 S_α 的算法:

输入:α,s

第一步:构造 s 的凸壳 $CH(s)$;

第二步:对 $p\in V(s)$,计算 $A(p)$;

第三步:检查 $A(p)\geqslant\alpha$,若 $A(p)\geqslant\alpha$,则 $p\in S_\alpha$ 否则 $p\notin S_\alpha$;

输出:S_α;

由引理 1 知,如上算法的第一步需要 $0(n\log n)$时间. 由于 $\alpha\geqslant\pi$,令 p_1,p_2 为在 $CH(s)$中与点 p 相连的两点(见图 3),显然有 $A(p)$为线段 l_{p_1p}与 l_{pp_2}的夹角. 于是在 $CH(s)$已知的情况下,计算 $A(V(s))=\{A(p);p\in V(s)\}$可在 $0(n)$时间内完成(计算一个点 $p\in V(s)$的 $A(p)$仅需常数时间). 算法的第三步显然可在 $0(n)$时间内完成. 于是有如下定理:

定理 2　若 $\alpha\geqslant\pi$,则 S_α 可在 $0(n\log n)$时间内求出.

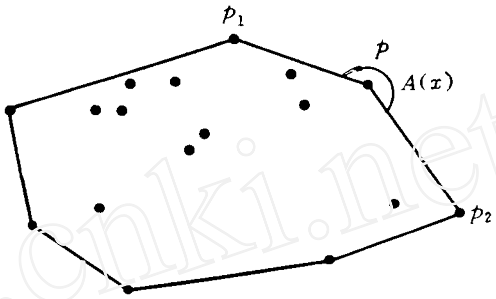

图 3　$\alpha\leqslant\pi$ 情况下的 S_α 的算法

3　结束语

本文引入了有限平面点集角控集的概念. 对于角控集 S_α 给出了两个基本几何性质. 同时,对计算 S_α 的算法进行了讨论,所给出的结论是最基本的. 与定理 2 相比较定理 1 的结果是不够理想的,能否设计出一般情形下比 $0(n^2\log n)$时间更快的算法是一个有待进一步探讨的问题. 同时,对于 S_α 几何性质的进一步研究无疑会对快速算法的设计提供新的思路.

参 考 文 献

1　Preparta F, Shamos M I. Computational Geometry. An Introduction, Springer—Verlage, 1985

2　Devroye L. A note on finding convex hull via maximal vectors. Information Processing Letter, 1980, (1): 55～56

3　Bentley J L, Kung H T, Schkolnick M et al. On the average number of maxima in a set of vectors and applications. J ACM 1978, (25), 536～543

4 Goddard W, King V, Schulman L. Optimal randomized algorthms for local sorting and-set—maxima, Proceedings of the 22th Annual ACM Symposium on Theyry of Computing, 1990

5 Ahe A V, Hopcroft J E, Ullman, J, D. Data Structures and Algorithms. Addison Wesley Publishing Company, 1983

（编辑 仝晓峰）

ON ANGLE DOMINATING SET OF A FINITE PLANAR POINISET

Xu Yinfeng Wang Yingluo
(School of Management)

Abstract

For a given finite planar point set S and angle α, satisfying $0<\alpha<2\pi$, the maximum subset S_α of S is called angle dominating set if S_α satisfys following condition: for any $x \in S_\alpha$, there are two rays with ray center x and ray angle no less than α such that no other points exists in the infinte domain with the two rays as its boundaries. In this paper, some geometrical properties of S_α and algorithms for finding S_α are given.

Keyword: *discrete computational geometry convex hull angie dominating set algorithm computational complexity*

（上接第106页）

STUDY ON CHARACTERISTICS OF THE DEPTH OF LIME-SOIL WELL SHAPED PILE

Zhang Zhiying Qiang Jinyi Wang Zhenshan Huang Tao
(School of Architecture Engineering and Mechanics)

Abstract

The paper discusses the regular patten between bearing capacity of lime-soil well shaped pile and its length based on a large analysis of finite element. A concept of equivalent length of the pile is set forth. According to some test data, it is proved that the equivalent length of the pile is reasonable and reliable, and pointed out that the depth effect problem should be paid attention to in engineering.

Keywords: *damage form bearing capacity of single pile depth effect useful length of the pile*