

Voronoi 图在球面上的推广*

徐寅峰

杨波艇

(西安交通大学管理学院, 西安 710049) (西安交通大学理学院, 西安 710049)

提 要

本文在球面上建立了 Voronoi 图, 并且证明了球面上 Voronoi 图的几个性质, 这些性质可看作是平面上 Voronoi 图的性质的推广[1-4].

关键词 计算几何, Voronoi 图, 球面

分类号 52A55

§ 1 定义和记号

为了表达简洁, 本文只在单位球面上建立 Voronoi 图, 并且所有角度都以弧度为单位。给定单位球面 S 上 $n+1$ 个点的集合 $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$, 考虑下面问题: 对于 P 中的每个点 p_i , 与 P 中的其它点比较而言, 球面上更接近于 p_i 的点 x 的轨迹是什么? 也就是要研究集合

$$\{x \in S \mid |\widehat{xp}_i| \leq |\widehat{xp}_j|, j = 0, 1, \dots, n, \text{ 但 } j \neq i\}$$

的结构和性质, 其中 $|\widehat{xy}|$ 表示 S 上 x 点和 y 点之间的最短距离(即 x 和 y 之间较小的一个大圆弧 \widehat{xy} 的长度)。设 \widehat{xy} 所对圆心角为 α , 则 $|\widehat{xy}| = 1 \cdot \alpha = \alpha$ 。

给定 P 中的两个点 p_i 和 p_j , 定义大圆弧 $\widehat{p_i p_j}$ 的平分线为 $\{x \in S \mid |\widehat{xp_i}| = |\widehat{xp_j}|\}$, 则集合 $\{x \in S \mid |\widehat{xp_i}| \leq |\widehat{xp_j}|\}$ 恰好是由大圆弧 $\widehat{p_i p_j}$ 的平分线确定的包含 p_i 的半球面, 用 $H(p_i, p_j)$ 表示此半球面。显然, S 上更接近于 p_i (与 P 中的其它点比较而言) 的点的轨迹(用 $V(p_i)$ 表示它)是 n 个半球面的交, 且是一个不多于 n 条边的球面凸多边形区域, 即

$$V(p_i) = \bigcap_{j \neq i} H(p_i, p_j).$$

$V(p_i)$ 称为关于 p_i 的 Voronoi 多边形, 这样的 $n+1$ 个区域把球面划分为一个凸网, 称它为 Voronoi 图, 记为 $\text{Vor}(P)$ 。显然, 若 $x \in V(p_i)$, 则 p_i 是 P 中距离 x 最近的点。因此, Voronoi 图包含了给定点集确定的所有邻近信息。

* 本文 1993 年 9 月 25 日收到。

§2 球面上 Voronoi 图的性质

在这一节中,我们证明了球面上 Voronoi 图的几个重要性质,这些性质可看作是平面上 Voronoi 图的性质的推广^[1-4]。

定理1 设 P 中没有四个点是共圆的,则 S 上 $\text{Vor}(P)$ 的每一个顶点恰好是它的三条边的公共交点。

证明 设 $e_1, e_2, \dots, e_k (k \geq 2)$ 是关联于顶点 q 的顺时针边序列,边 e_i 为 $V(p_{i-1})$ 和 $V(p_i) (i = 2, \dots, k)$ 所共有,且 e_1 为 $V(p_k)$ 和 $V(p_1)$ 所共有,如图1所示。显然 $|q\hat{p}_1| = |q\hat{p}_2| = \dots = |q\hat{p}_k|$ 。由此可知 p_1, p_2, \dots, p_k 共圆,

由假设可知 $k \leq 3$ 。若 $k = 2$, 则 e_1 和 e_2 都属于大圆弧 $\widehat{p_1 p_2}$ 的平分线,从而 e_1 和 e_2 不相交于 q 。因此 $k = 3$ 。

定理1表明 $\text{Vor}(P)$ 的顶点 q 是由 P 中三个点确定的圆心,用 $C(q)$ 表示此圆,则 $C(q)$ 有下面性质:

定理2 设 q 是 S 上 $\text{Vor}(P)$ 的任一顶点,且 q 是 p_1, p_2, p_3 确定的圆心,则 $C(q)$ 不包含 P 的其它点。

证明 反证法。若 $C(q)$ 包含 $p_i \in P$, 则 $|q\hat{p}_i| < |q\hat{p}_j|, i = 1, 2, 3$ 。由 $V(p_i)$ 的定义,此时 $q \in V(p_i)$, 且 $q \notin V(p_j), j = 1, 2, 3$ 。矛盾。

定理3 设 $A(p_i)$ 是 $V(p_i)$ 的面积, $d = \frac{1}{2} \min\{|p_i\hat{p}_j| | p_i, p_j \in P, i \neq j\}$, 则对 P 中的任意点 p_i , 下面不等式成立

$$A(p_i) \geq 10 \arccos(\cos d \sin \frac{\pi}{5}) - 3\pi.$$

证明 考察 P 中的任一点,不妨设为 p_0 , 且设 p_1, p_2, \dots, p_k 是顺时针排列的点序列,使得三角形 $p_0 p_i p_{i+1} (i = 1, \dots, k, \text{且令 } p_{k+1} = p_1)$ 的外接圆的圆心是 $\text{Vor}(P)$ 的一个顶点,设此顶点为 q_i 。设 $\widehat{p_0 p_i}$ 的中点为 m_i (令 $m_{k+1} = m_1$), $\angle p_0 p_i q_i = \alpha_i$, $\angle q_i p_0 p_{i+1} = \alpha'_i$, 如图2所示。则球面三角形 $p_0 m_i q_i$ 的面积为

$$\alpha_i + \arccos(\cos \frac{|p_0 \hat{p}_i|}{2} \sin \alpha_i) - \frac{\pi}{2},$$

因此

$$A(p_0) = \sum_{i=1}^k [\alpha_i + \arccos(\cos \frac{|p_0 \hat{p}_i|}{2} \sin \alpha_i) - \frac{\pi}{2} + \alpha'_i + \arccos(\cos \frac{|p_0 \hat{p}_{i+1}|}{2} \sin \alpha'_i) - \frac{\pi}{2}].$$

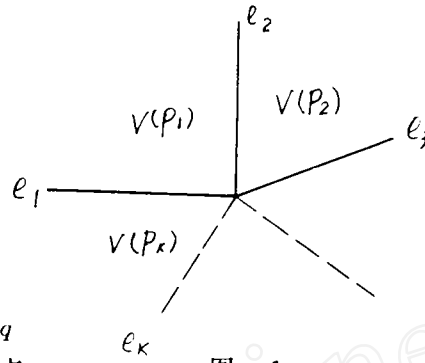


图 1

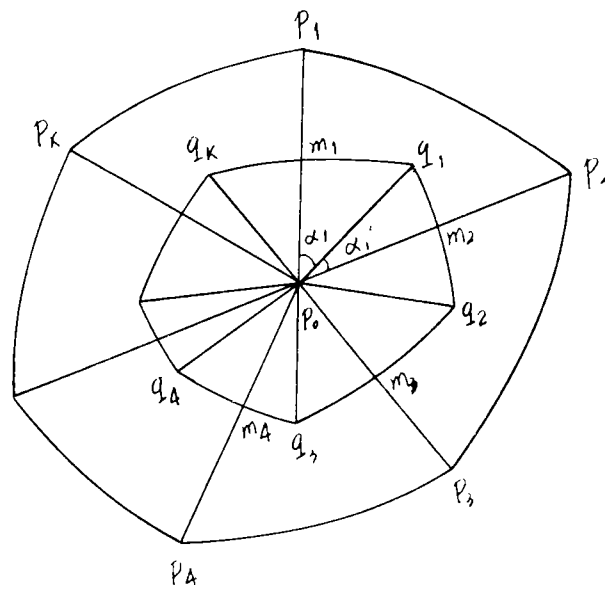


图 2

设 $x_i = |\widehat{p_0 p_i}|$, $f(x_i) = \arccos(\cos \frac{x_i}{2} \sin \alpha_i)$, $\alpha_i \in (0, \frac{\pi}{2})$, $x_i \in (0, \pi)$, 由于

$$f'(x_i) = -\frac{-\frac{1}{2} \sin \frac{x_i}{2} \sin \alpha_i}{\sqrt{1 - (\cos \frac{x_i}{2} \sin \alpha_i)^2}} > 0$$

所以 $f(x_i)$ 严格单调增, 从而

$$A(p_0) \geq \sum_{i=1}^k [\alpha_i + \arccos(\cos d \sin \alpha_i) - \frac{\pi}{2} + \alpha'_i + \arccos(\cos d \sin \alpha'_i) - \frac{\pi}{2}]$$

即当 $|\widehat{p_0 m_i}| = d$ 时, $A(p_0)$ 减小, 而此时三角形 $p_0 m_i q_i$ 和三角形 $p_0 m_{i+1} q_i$ 全等, 所以

$$\begin{aligned} A(p_0) &\geq \sum_{i=1}^k 2[\alpha_i + \arccos(\cos d \sin \alpha_i) - \frac{\pi}{2}] \\ &= 2\pi - k\pi + 2 \sum_{i=1}^k \arccos(\cos d \sin \alpha_i). \end{aligned} \quad (1)$$

下面设法求出(1)式右端的最小值.

考虑关于 α_i ($i = 1, \dots, k$) 的非线性规划:

$$(NP) \begin{cases} \min & \sum_{i=1}^k \arccos(\cos d \sin \alpha_i) \\ s. t. & \sum_{i=1}^k \alpha_i = \pi \\ & \alpha_i \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad i = 1, \dots, k. \end{cases}$$

显然(NP)有最优解. 设 λ 是(NP)的 Lagrange 乘子, 由 Kuhn-Tucker 条件知, 最优解满足

$$\begin{cases} [\arccos(\cos d \sin \alpha_i)]' + \lambda = 0, \quad i = 1, \dots, k \\ \sum_{i=1}^k \alpha_i = \pi. \end{cases} \quad (2)$$

$$\alpha_i \in (0, \frac{\pi}{2})$$

由(2)可解出

$$\alpha_i = \frac{\pi}{k}, \quad i = 1, \dots, k \quad (3)$$

现在我们来证明(NP)是一个凸规划问题. 首先, 可行域显然是一个凸集. 设 $g(\alpha_i) = \arccos(\cos d \sin \alpha_i)$, 则

$$\begin{aligned} g'(\alpha_i) &= -\frac{\cos d \cos \alpha_i}{\sqrt{1 - (\cos d \sin \alpha_i)^2}} \\ &\quad - \cos d \sin \alpha_i \sqrt{1 - (\cos d \sin \alpha_i)^2} - \cos d \cos \alpha_i \frac{-2 \cos^2 d \sin \alpha_i \cos \alpha_i}{2 \sqrt{1 - (\cos d \sin \alpha_i)^2}} \\ g''(\alpha_i) &= \frac{1 - (\cos d \sin \alpha_i)^2}{1 - (\cos d \sin \alpha_i)^2} \\ &= [1 - (\cos d \sin \alpha_i)^2]^{-\frac{3}{2}} [\cos d \sin \alpha_i - \cos^3 d \sin^3 \alpha_i - \cos^3 d \sin \alpha_i \cos^2 \alpha_i] \\ &= [1 - (\cos d \sin \alpha_i)^2]^{-\frac{3}{2}} [\cos d \sin \alpha_i - \cos^3 d \sin \alpha_i] \end{aligned}$$

> 0 .

因此 $g(\alpha)$ 是严格凸函数, 从而 (NP) 的目标函数是严格凸函数。故 (3) 是 (NP) 的唯一整体最优解。由 (1) 式知

$$A(p_0) \geq 2\pi - k\pi + 2k \arccos(\cos d \sin \frac{\pi}{k}) \quad (4)$$

当 $k \geq 6$ 时, 由球面三角形的性质可知, 此时 $|\widehat{p_i p_{i+1}}| < |\widehat{p_0 p_i}| = 2d$ 。与 d 的定义矛盾。而当 $k = 3, 4, 5$ 时, 由比较即可知当 $k = 5$ 时 (4) 式右边最小, 因此

$$A(p_0) \geq 10 \arccos(\cos d \sin \frac{\pi}{5}) - 3\pi.$$

参考文献

- [1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph Theory with Applications, Macmillan Press, London, 1972.
- [2] F. Aurenhammer, Voronoi diagrams—a survey, Inst. for Inf. Proc., Graz Tech. Univ. Tech. report, 1988.
- [3] S. J. Fortune, A sweepline algorithm for Voronoi diagrams, Proc. 2nd Ann. ACM symp. Comput. Geom. (1986) 313–322.
- [4] F. Preparata and M. I. shamos, Computational Geometry—An Introduction, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

The Generalized Voronoi Diagram on the Sphere

Xu Yinfeng Yang Boting
(Xi'an Jiaotong University)

Abstract

In this paper, we generalize the Voronoi diagram to the sphere, and prove some properties of Voronoi diagram on the sphere. These properties is the generalization of the corresponding properties of Voronoi diagram on the plane.