应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
1996, Vol. 9, No. 4: 454～458

关于一类几何极值问题

杨波艇 徐寅峰
(西安交通大学 西安 710049)

提要 设平面上边长为1和2的闭矩形区域为 R, S 是 R 上一个有限点集, $f(S)$ 是 S 中任意两点之间的最小距离, $f_R(n)=\max\limits_{|S|=n} f(S)$, 本文给出了当 $2\leqslant n\leqslant 6$ 时, $f_R(n)$ 的精确值以及相应的图形.

关键词: 极值问题; 几何; 布局
AMS(1991)主题分类: 05C12.

1 引 言

在一些特殊的有界闭凸区域(记为 T)上找出 n 个点,使这 n 个点两两之间的最小距离尽可能地大,称为布局问题[1~6],是一类很难的几何极值问题,研究进展一直不大. 当 T 为圆时,解决了 $2\leqslant n\leqslant 10$ 的情形; 当 T 为正方形时,解决了 $2\leqslant n\leqslant 9$ 和 $n=16$ 时的情形; 当 T 为等腰直角三角形时,解决了 $2\leqslant n\leqslant 7$ 时的情形; 当 T 为球或立方体等其它特殊区域时,也解决了一些 n 较小的情形. 本文考虑的 T 为一种新的闭区域,研究的问题可叙述为: 设平面上边长为1和2的闭矩形区域为 R, S 是 R 上一个有限点集, $f(S)$ 是 S 中任意两点之间的最小距离,求 $f_R(n)=\max\limits_{|S|=n} f(S)$. 这个问题也可理解为在矩形区域 R 上放 n 个直径都是 d 的圆(要求不能互相重叠),求 d 的最大值. 显然这类问题是有许多应用背景的.

2 当 $2\leqslant n\leqslant 4$ 时的情形

平面上顶点为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的闭多边形记为 $A_1A_2\cdots A_m$, 特别地, A_1A_2 表示连接 A_1 和 A_2 的闭线段. 点 P_1 和 P_2 之间的距离记为 $d(P_1P_2)$. 下面引理显然成立.

引理1 设 T 为闭凸多边形,且对任意的 $x, y\in T$, 都有 $d(x,y)\leqslant m$. 如果存在 $P_1, P_2\in T$, 使得 $d(P_1,P_2)=m$, 那么 P_1, P_2 是 T 的两个顶点.

由引理1显然可得, $f_R(2)=\sqrt{5}$, 相应图形如图1所示.

定理1 $f_R(3)=\sqrt{2}$, 相应图形如图2所示.

证 设 $S=\{P_1, P_2, P_3\}\subset R$, 满足

$$\min_{1\leqslant i<j\leqslant 3} d(P_i, P_j)\geqslant\sqrt{2}. \tag{1}$$

收稿日期: 1993-10-29

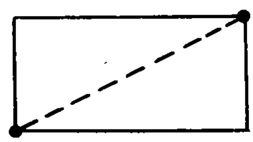

图1 $f_R(2)=\sqrt{5}$

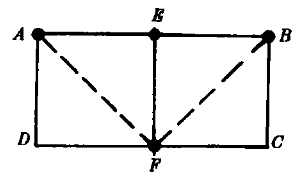

图2 $f_R(3)=\sqrt{2}$

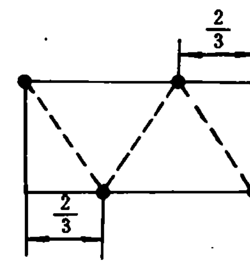

图3 $f_R(4)=\sqrt{13}/3$

设 R 的顶点为 A、B、C、D，边 AB 和 CD 的中点分别为 E，F. 则 EF 将 R 分为两个正方形，且至少有一个正方形包含有 S 中有2个点，不失一般性，设 $AEFD$ 中包含 P_1和 P_2，由引理1和(1)式知，$P_1=A$，$P_2=F$ 或 $P_1=D$，$P_2=E$，同理可证 $P_3=B$ 或 $P_3=C$. 因此由矩形的对称性可知，S 只有图2所示的情形，且此时(1)式中等号成立，即 $f_R(3)=\sqrt{2}$. 证毕.

定理2 $f_R(4)=\sqrt{13}/3$，相应图形如图3所示.

3 当 $n=5$ 时的情形

对于单位正方形 I 和直角边为1的等腰直角三角形 J，相应的 $f_R(n)$ 分别为记为 $f_{\square}(n)$ 和 $f_{\triangle}(n)$，即

$$f_{\square}(n)=\max_{S\subset I,|S|=n}\min_{P_i,P_j\in S}d(P_i,P_j),\quad f_{\triangle}(n)=\max_{S\subset J,|S|=n}\min_{P_i,P_j\in S}d(P_i,P_j),$$

容易证明下面3个引理成立.

引理2 $f_{\square}(3)=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，相应图形如图4所示，其中 $\alpha=\frac{\pi}{12}$.

引理3 $f_{\square}(4)=1$，相应图形如图5所示.

引理4 $f_{\triangle}(3)=1$. 相应图形如图6所示.

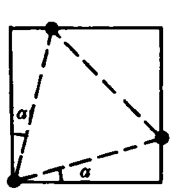

图4 $f_{\square}(3)=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

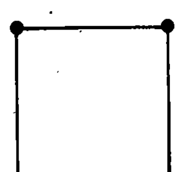

图5 $f_{\square}(4)=1$

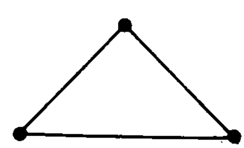

图6 $f_{\triangle}(3)=1$

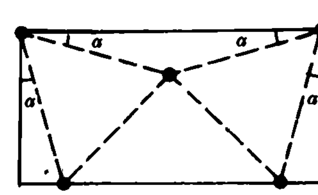

图7 $f_R(5)=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

定理3 $f_R(5)=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，相应图形如图7所示，其中 $\alpha=\frac{\pi}{12}$.

证 如图8所示，设 R 的顶点是 A_1、A_3、A_4、A_6，边 A_1A_3和 A_4A_6的中点分别是 A_2和 A_5，点 B_i，C_i($1\leqslant i\leqslant 6$)是 R 的边上的点，且满足

$$d(B_i,A_i)=d(C_i,A_i)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3},1\leqslant i\leqslant 6,\tag{2}$$

D_i，E_i($1\leqslant i\leqslant 4$)是图中连线的交点.

设 $S=\{P_1,P_2,\cdots,P_5\}\subset A_1A_3A_4A_6$，且满足

$$\min_{1\leqslant i<j\leqslant 5}d(P_i,P_j)\geqslant\sqrt{6}-\sqrt{2}.\tag{3}$$

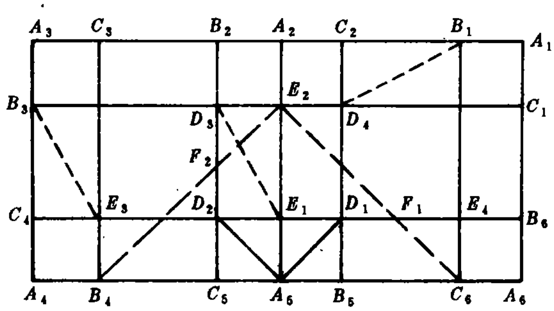

图8 $d(B_i,A_i)d(C_i,A_i)=2-\sqrt{3}$

我们将证明满足(3)式的 $P_i(1\leqslant i\leqslant 5)$ 在 R 中的布局只有图7这一种情形，此时(3)式中等号成立，从而定理结论成立.

首先用反证法证明 $A_5\notin S$，即 $P_i\neq A_5(1\leqslant i\leqslant 5)$. 不妨假设 $P_5=A_5$. 因为 $\sqrt{6}-\sqrt{2}>1$，所以由引理3知 S 中不能有4个点在一个闭单位正方形中，从而在 $A_1A_2A_5A_6$ 和 $A_2A_3A_4A_5$ 中各有 S 中不同于 P_5 的两个点，不妨设 $P_1,P_2\in A_1A_2A_5A_6$，$P_3,P_4\in A_2A_3A_4A_5$，由引理3和(3)式可知，此时 P_1,P_2 中有一点与 B_2 重合，P_3,P_4 中有一点与 C_2 重合，但由(2)式知 $d(B_2,C_2)=2(2-\sqrt{3})<2\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，与(3)式矛盾. 因此，$A_5\notin S$. 同理可证 $A_2\notin S$.

用 $d(V)$ 表示闭多边形区域 V 的直径，即 V 中两点之间的最大距离，通过计算可知

$$d(A_5A_6B_6D_1)=d(A_1C_2D_1B_6)=d(A_5D_1C_2B_2D_2)$$
$$=d(A_3C_4D_2B_2)=d(A_5D_2C_4A_4)=\sqrt{6}-\sqrt{2},$$

记这5个闭多边形区域分别为 $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4,\psi_5$. 由引理1和 $A_5\notin S$ 知，每个 $\psi_i(1\leqslant i\leqslant 5)$ 只能包含 S 中的1个点. 不妨设 $P_i\in\psi_i(1\leqslant i\leqslant 5)$，由(3)式易知

$$P_i\notin D_1B_6\cup D_1C_2\cup D_2B_2\cup D_2C_4\cup A_5D_1\cup A_5D_2,\quad 1\leqslant i\leqslant 5. \tag{4}$$

因为 $d(E_2,B_4)=d(E_2,C_6)=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，由引理4和(3)式知，$S$ 中至多有3个点属于等腰直角三角形 $C_6E_2B_4$，并且如果 P_1,P_3,P_5 都属于 $C_6E_2B_4$，则必有 $P_1=C_6$，$P_3=E_2$，$P_5=B_4$. 进而由引理2知 $P_2=A_1$，$P_4=A_3$，因此定理得证. 如果 P_1,P_3,P_5 不都属于 $C_6E_2B_4$，下面分三种情形进行讨论.

(i) 当 $P_1\notin C_6E_2B_4$ 时，设 F_1 是 C_6E_2 和 D_1B_6 的交点，则 $P_1\in A_6B_6F_1C_6\backslash F_1C_6$(即 P_1 在闭梯形区域 $A_6B_6F_1C_6$ 上，但不在闭线段 F_1C_6 上，下面出现这种记法时意义相同). 由(3)、(4)式和引理1知，区域 $A_6A_1B_1D_4D_1F_1C_6\backslash\{C_6,D_1,B_1,D_4\}$ 至多包含 S 中的1个点，由于 P_1 已在此区域中，所以 $P_2\in B_1C_2D_4$；区域 $B_1B_2D_3E_1D_1D_4\backslash\{D_3,E_1\}$ 至多包含 S 中的1个点. 由于 P_2 已在此区域中，所以 $P_3\in A_5D_1E_1D_3D_2$；区域 $A_6B_6E_1A_5\backslash\{E_1,A_5\}$ 至多包含 S 中的1个点，由于 P_1 已在此区域中，所以 $P_3\in A_5E_1D_3D_2$；区域 $A_5E_1D_3D_2C_4A_4\backslash\{A_4,A_5,D_3,C_4\}$ 至多包含 S 中的1个点，由于 P_3 已在此区域中，所以 $P_5=A_4$. 从而 $P_3=E_1$，$P_1=A_6$，$P_2=B_1$. 由引理2知 $P_4=C_3$. 由对称性知，此时 P_i 的布局仍为图7，因此定理得证.

(ii) 当 $P_5\notin C_6E_2B_4$ 时，同(i)类似地可证明定理成立.

(iii) 当 $P_3\notin C_6E_2B_4$ 时，设 F_2 是 B_4E_2 和 D_2D_3 的交点. 由对称性，不妨假设 $P_3\in A_2B_2F_2E_2$，同(i)类似地可证明 $P_4\in B_3C_4E_3$，$P_5\in A_5D_2C_5$. 由于 $A_5\notin S$，$A_2\notin S$，所以 $P_3,P_5\in A_2B_2C_5A_5\backslash\{A_2,A_5\}$，但由引理1和(3)式知这是不可能的，矛盾. 因此 $P_3\in C_6E_2B_4$.

综上所述，由(iii)知 P_3 总是属于 $C_6E_2B_4$，若 P_1 和 P_2 也属于 $C_6E_2B_4$，则定理成立；若 P_1 和

P_2 至少有一个不属于 $C_6E_2B_4$，则由(i)或(ii)知定理成立. 因此总有 $f_R(5)=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，且相应图形如图7所示. 证毕.

4 当 $n=6$ 时的情形

定理4 $f_R(6)=1$，相应图形如图9所示.

证 设 $S=\{P_1,P_2,\cdots,P_6\}\subset R$，且满足

$$\min_{1\leqslant i<j\leqslant 9} d(P_i,P_j)\geqslant 1, \tag{5}$$

我们将证明满足(5)式的 $P_i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 在 R 中的布局只有图9这一种情形，此时(5)式中等号成立.

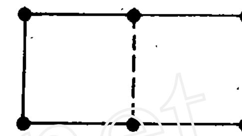

图9　$f_R(6)=1$

R 可被6个边长为 $a_0=\frac{1}{2}, b_0=\frac{2}{3}$ 的矩形 $R_{0i}(1\leqslant i\leqslant 6)$ 所覆盖(图10)，其直径皆为 $d(R_{0i})=\frac{5}{6}<1(1\leqslant i\leqslant 6)$，所以由(5)式知，在每个 R_{0i} 中至多包含 S 中的1个点，由于 R_{0i} 的个数和 S 中点的个数相等，所以每个 R_{0i} 中正好包含 S 中的一个点，不妨设 $P_i\in R_{0i}(1\leqslant i\leqslant 6)$.

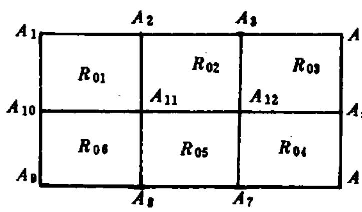

图10　覆盖

下面将 R_{0i} 缩减为 R_{1i}，使得 $P_i\in R_{1i}\subset R_{0i}$，每个 R_{0i} 可利用其邻近的矩形进行缩减，例如，考察用 R_{02} 对 R_{01} 进行缩减(图11). 作一个对角线长度为1的矩形，使其包含 R_{02} 且与 R_{01} 相交部分的面积尽可能地大，即在边 A_1A_2 上找一点 B_1，边 $A_{10}A_{11}$ 上找一点 B_2，使得 $d(B_1,A_{12})=d(B_2,A_3)=1$. 由(5)式知，区域 $B_1B_2A_{12}A_3\backslash B_1B_2$ 至多包含 S 中的1个点，由于 $P_2\in A_2A_3A_{12}A_{11}$，所以 $P_1\in A_1B_1B_2A_{10}$. 同理，用 R_{06} 对 R_{01} 进行缩减，可得 $P_1\in A_1A_2C_2C_1$，设 B_1B_2 与 C_1C_2 相交于 D，因此 $P_1\in A_1B_1DC_1$，将 $A_1B_1DC_1$ 记为 R_{11}，其边长 $a_1<a_0, b_1<b_0$. 显然 $R_{0i}(2\leqslant i\leqslant 6)$ 都可用同样方法进行缩减，但是为了使 $R_{1i}(2\leqslant i\leqslant 6)$ 的边长也都是 a_1 和 b_1，在用 R_{01} 和 R_{03} 对 R_{02} 进行缩减时，各缩减应该减小面积的一半，如图12所示，$d(A_2,E_1)=d(A_3,E_2)=\frac{1}{2}d(A_2,B_1)=\frac{1}{2}d(A_3,B_3)$，$d(A_{10},C_1)=d(A_{10},C_3)$. 对于 R_{05} 也有同样情况.

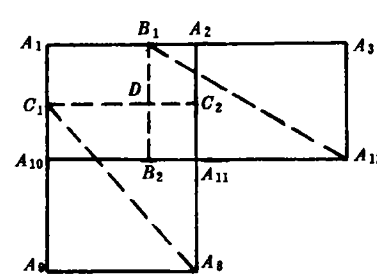

图11　缩减

对于 $R_{1i}(1\leqslant i\leqslant 6)$，利用上面同样的方法可缩减为 $R_{2i}(1\leqslant i\leqslant 6)$，使得 $P_i\in R_{2i}\subset R_{1i}, a_2<a_1, b_2<b_1$. 反复进行这一缩减过程，则可得 $P_i\in R_{ni}\subset R_{n-1,i}\subset\cdots\subset R_{0i}, a_n<a_{n-1}<\cdots<a_0=\frac{1}{2}, b_n<b_{n-1}<\cdots<b_0=\frac{2}{3}$. a_{n+1} 和 b_{n+1} 可由下式得到(图13)

$$a_n^2+\left(1+\frac{b_n}{2}-b_{n+1}\right)^2=1,\quad b_n^2+(1-a_{n+1})^2=1. \tag{6}$$

由于 $a_n\in[0,1/2], b_n\in[0,2/3]$，所以 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是单调下降有下界数列，从而都收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则(6)式可得

$$a^2+(1-b/2)^2=1,\quad b^2+(1-a)^2=1. \tag{7}$$

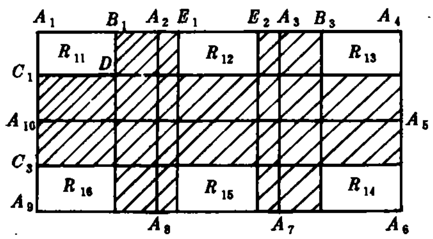

图12 递推

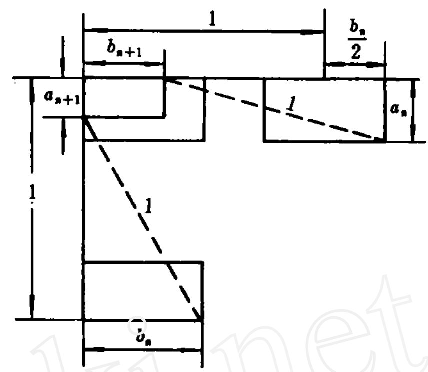

图13 递推

当 $a\in[0,1/2]$，$b\in[0,2/3]$时，求解(7)式可得 $a=0$，$b=0$. 因此满足(5)式的 $P_i(1\leqslant i\leqslant 6)$在 R 中的布局只有图9这一种情形，且此时 $f_R(6)=1$. 证毕.

参 考 文 献

1 Conway J H, Sloane N J A. Sphere Packing, Lattices and Groups. Springer-Verlag, 1988.

2 Rogers C A. Packing and Covering. Cambridge University Press, 1964.

3 Fejes Tóth L. Regular Figures. Pergamon Oxford, 1964.

4 Fejes Tóth L. Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag, 1972.

5 Erdős P, Path J. On a problem of L. Fejes Tóth. Discrete Mathematics, 1980, 30: 103～109

6 Fejes Tóth G. New results in the theory of packing and covering. in: Convexity and Its Application, Ed. by P. M. Gruber and J. M. Wills, Birkhauser Verlag, 1983. 318～359

On a Geometric Extremum Problem

Yang Boting *Xu Yinfeng*

(*Xi'an Jiaotong University*, *Xi'an*, 710049)

Abstract

Let R be a closed rectangle of sides 1 and 2 in the plane, S be a finite set of points in R, $f(S)$ denote the minimum distance between pairs of points of S, and $f_R(n)=\max_{|S|=n} f(S)$. In this paper, the exact values of $f_R(n)$ for $2\leqslant n\leqslant 6$ and the corresponding configurations are given.

Keywords: Extremum problem; Geometric; Packing

AMS(1991) subject classification: 05C12.