

滚齿过程棱面度的解析

张治中 徐寅峰

(机械工程系) (西安重型机械研究所)

提要 本文主要讨论滚齿过程中渐开线与包络切线之间形成的棱面度问题。许多文献^{[1][2][3]}都引用了 *F. Pohl* 的棱面度公式和图表。但是, *Pohl* 公式简化时, 忽略了微量计算中渐开线上两点曲率半径之间的差值, 致使该公式的计算误差相当于 *JB179-83* 齿形公差的 1~2 级。本文应用矢函数法求解棱面度, 提高了计算精度, 并取得了棱面度顶点的位置, 为平整棱面度提供了依据。

关键词 棱面度 棱面度平整

1、问题的提出

滚齿加工时, 无论是阿基米德滚刀或其他类型的滚刀, 齿形的形成过程都是断续的, 在各滚切面中的齿形是由若干包络成理论渐开线的折线所组成的。然而, 折线的数目总是有限的; 当采用单头滚刀加工时, 折线数等于切削刃数 K (即滚刀的容屑槽数) 和加工齿轮与基准齿条啮合时重合度 ϵ 的乘积。因此, 滚齿加工的齿形与理论渐开线之间存在着一定的差异, 也是滚齿加工中无法避免的一种齿形误差 (见图 1)。

通常, 将两折线交角的顶点与理论渐开线之间的最小距离叫做棱面度, 或称多角形误差^[4]。而将两折线的法线, 即渐开线的曲率半径之间的夹角, 称为切削角 ψ (见图 2)。它

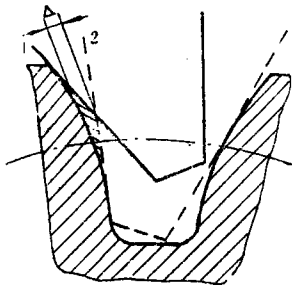


图 1

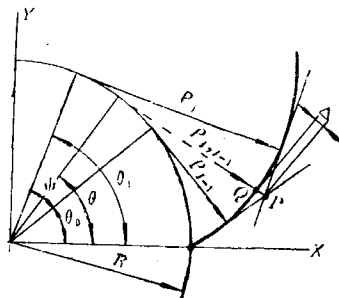


图 2

原稿收到 1986 年 8 月 23 日

相当于滚刀每转过一个齿距角后齿坯的转角, 即

$$\psi = \frac{2\pi Z_T}{KZ} \quad (1)$$

式中 Z_T ——滚刀的头数;
 Z ——被加工齿轮的齿数;
 K ——滚刀的容屑槽数。

显然, 棱面度的大小与被加工齿轮的齿数有关, 它将直接影响齿形误差 Δf_f 。P. Pohl^{[1][2]} 提出的棱面度计算公式和图表沿用迄今, 计算值都偏小, 而对该公式的精确度却一直未能引起应有的重视。在贯彻部颁标准 JB179-83《渐开线圆柱齿轮精度标准》, 新老机标过渡时, 5~12级精度的齿形公差 f_f 将压缩一个等级^[6]。那么, 注意滚齿过程的棱面对齿形误差的影响, 将有实际意义的。

2、棱面度及其顶点位置的计算

图2表示滚刀相邻两刀刃在齿面上的切削位置及其残留的面积。图中 ρ_j 和 ρ_{j-1} 分别为渐开线齿面与刀刃相切点的曲率半径, $\rho_{j,j-1}$ 为齿面上 Q 点的曲率半径。

参照渐开线的性质, 可以写出其参数方程, 即

$$\begin{cases} x = R \cos \theta + R\theta \sin \theta \\ y = R \sin \theta - R\theta \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (3)$$

式中, R 为基圆半径, θ 为展开角。(见图2)

由于渐开线上展开角 θ 点处的切线方程为^[6]

$$\vec{\rho} = \vec{r}(\theta) + \lambda \vec{r}'(\theta) \quad (4)$$

式中, λ 为参变数。则对应于 $\theta = \theta_0$ 的切线方程是

$$\begin{cases} x_0 = R \cos \theta_0 + R\theta_0 \sin \theta_0 + \lambda_0 R \theta_0 \cos \theta_0 \\ y_0 = R \sin \theta_0 - R\theta_0 \cos \theta_0 + \lambda_0 R \theta_0 \sin \theta_0 \end{cases} \quad (5)$$

当 θ 具有增量 ψ 后, 即 $\theta_1 = \theta_0 + \psi$ 时, 将得到另一组切线方程

$$\begin{cases} x_1 = R \cos \theta_1 + R\theta_1 \sin \theta_1 + \lambda_1 R \theta_1 \cos \theta_1 \\ y_1 = R \sin \theta_1 - R\theta_1 \cos \theta_1 + \lambda_1 R \theta_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (6)$$

公式(5)和(6)分别为渐开线展开角 θ_0 和 θ_1 的切线方程, 则两切线方程的交点应满足下列条件, 即

$$\begin{cases} x_0 = x_1 \\ y_0 = y_1 \end{cases}$$

由此, 可以解得参变数 λ_0 , 有

$$\lambda_0 = \frac{\theta_1 - \sin(\theta_1 - \theta_0) - \theta_0 \cos(\theta_1 - \theta_0)}{\theta_0 \sin(\theta_1 - \theta_0)} \quad (7)$$

将(7)式的参变数 λ_0 代入(5)式, 得到两切线交点的坐标 $P(x_p, y_p)$, 也就是棱面度顶点的坐标, 即

$$\begin{cases} x_p = \frac{\theta_1 \cos \theta_0 - \theta_0 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 - \theta_0)} R \\ y_p = \frac{\theta_1 \sin \theta_0 - \theta_0 \sin \theta_1}{\sin(\theta_1 - \theta_0)} R \end{cases} \quad (8)$$

若渐开线 $\vec{r} = \vec{r}(\theta)$ 上的点矢 $\vec{r}(\theta)$ 满足 $|\vec{r} - \vec{P}|$ 为最小, 其中 $\vec{P} = x_p \vec{i} + y_p \vec{j}$, 则 $|\vec{r} - \vec{P}|$ 就是所求的棱面度。

因此, 该点矢 $\vec{r}(\theta)$ 应满足

$$(\vec{r} - \vec{P})\vec{r}' = 0 \quad (9)$$

式中

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{P} &= x_p\vec{i} + y_p\vec{j} \end{aligned}$$

那么

$$\vec{r}\vec{r}' - \vec{P}\vec{r}' = x \cdot x' + y \cdot y' - (x_p \cdot x' + y_p \cdot y') = 0 \quad (10)$$

将公式(2)和(8)代入(10)式, 经整理后得

$$\sin(\theta_1 - \theta_0) - \theta_1 \cos(\theta - \theta_0) + \theta_0 \cos(\theta - \theta_1) = 0 \quad (11)$$

按泰勒级数将 $\sin(\theta_1 - \theta_0)$ 、 $\cos(\theta - \theta_0)$ 和 $\cos(\theta - \theta_1)$ 进行展开, 有

$$\begin{aligned} \sin(\theta_1 - \theta_0) &= (\theta_1 - \theta_0) - \frac{(\theta_1 - \theta_0)^3}{3!} + \dots \\ \cos(\theta - \theta_0) &= 1 - \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2!} + \frac{(\theta - \theta_0)^4}{4!} - \dots \\ \cos(\theta - \theta_1) &= 1 - \frac{(\theta - \theta_1)^2}{2!} + \frac{(\theta - \theta_1)^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

代入(11)式, 并略去三阶以上无穷小量后, 得

$$(\theta_1 \theta_0 - \theta^2)(\theta_1 - \theta_0) = 0$$

由于切削角 $\psi = \theta_1 - \theta_0 \neq 0$, 则有

$$\theta = \sqrt{\theta_1 \theta_0} \quad (12)$$

上式表明, 渐开线 $\vec{r} = \vec{r}(\theta)$ 上对应于 $\theta = \sqrt{\theta_1 \theta_0}$ 的点 $Q(x_Q, y_Q)$ 可以作为所求的点矢。因此, 通过 $P(x_p, y_p)$ 点的直线 \overline{PQ} 必定垂直于渐开线在 Q 点的切线, 且 \overline{PQ} 的延长线必然是基圆的切线, 即 $\rho_{j,j-1}$ 和 \overline{PQ} 处于一条直线上(见图2)。所以, $|\overline{PQ}|$ 就是所求的棱面度。

由公式(2)得到 $Q(x_Q, y_Q)$ 的坐标为

$$\begin{cases} x_Q = R \cos \sqrt{\theta_0 \theta_1} + R \sqrt{\theta_0 \theta_1} \sin \sqrt{\theta_0 \theta_1} \\ y_Q = R \sin \sqrt{\theta_0 \theta_1} - R \sqrt{\theta_0 \theta_1} \cos \sqrt{\theta_0 \theta_1} \end{cases} \quad (13)$$

令棱面度 $\Delta = |\overline{PQ}|$, 则

$$\Delta^2 = (x_p - x_Q)^2 + (y_p - y_Q)^2 = R^2(e_1 - 2e_2 + e_3) \quad (14)$$

式中

$$e_1 = \frac{\theta_1^2 + \theta_0^2 - 2\theta_1\theta_0 \cos(\theta_1 - \theta_0)}{\sin^2(\theta_1 - \theta_0)}$$

$$e_2 = \frac{\theta_1 [\cos(\sqrt{\theta_1 \theta_0} - \theta_0) + \sqrt{\theta_1 \theta_0} \sin(\sqrt{\theta_1 \theta_0} - \theta_0)] - \theta_0 [\cos(\sqrt{\theta_1 \theta_0} - \theta_1) + \sqrt{\theta_1 \theta_0} \sin(\sqrt{\theta_1 \theta_0} - \theta_1)]}{\sin(\theta_1 - \theta_0)}$$

$$e_3 = 1 + \theta_1 \theta_0$$

又利用泰勒级数展开, 整理后得

$$e_1 = 1 + \theta_1 \theta_0 + \frac{1}{3} \psi^2 + \frac{\theta_1 \theta_0}{4} \psi^2 + \frac{1}{15} \psi^4 + \frac{\theta_1 \theta_0}{24} \psi^4 + \dots$$

$$e_2 = 1 + \theta_1 \theta_0 + \frac{1}{6} \psi^2 + \frac{\theta_1 \theta_0}{8} \psi^4 + \left[\frac{1}{27 \times 5} \cdot \frac{\theta_1}{\theta_0} - \frac{1}{24} \cdot \frac{\theta_1 \theta_0}{(\sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_0})^4} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{\theta_1 \theta_0 (\theta_0^2 \sqrt{\theta_1} + \theta_1^2 \sqrt{\theta_0})}{(\sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_0})^5} + \frac{7}{360} (1 + \theta_1 \theta_0) - \frac{1}{36} \cdot \frac{\theta_1 \theta_0 \sqrt{\theta_1 \theta_0}}{(\sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_0})^2} \right] \psi^4 + \dots$$

代入(14)式, 则

$$\frac{\Delta^2}{R^2} = \left[\frac{1}{15} + \frac{\theta_1 \theta_0}{24} - \frac{1}{2^6 \times 3} \cdot \frac{\theta_1}{\theta_0} + \frac{1}{12} \cdot \frac{\theta_1 \theta_0}{(\sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_0})^4} - \frac{1}{60} \cdot \frac{\theta_1 \theta_0 (\theta_0^2 \sqrt{\theta_1} + \theta_1^2 \sqrt{\theta_0})}{(\sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_0})^5} - \frac{7}{180} (1 + \theta_1 \theta_0) + \frac{1}{18} \cdot \frac{\theta_1 \theta_0 \sqrt{\theta_1 \theta_0}}{(\sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_0})^2} \right] \psi^4 + \dots$$

通常, $\psi < 0.05$ 。将 $\theta_1 = \theta_0 + \psi$ 代入方程后, 略去 ψ 的五阶以上高阶分量, 则

$$\Delta^2 \approx \left[\left(\frac{R}{6} \right)^2 + \left(\frac{R \theta_0}{8} \right)^2 \right] \psi^4 = \left[\left(\frac{R}{6} \right)^2 + \left(\frac{\rho_0}{8} \right)^2 \right] \psi^4$$

所以

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{\theta_0^2}{64}} \cdot R \psi^2 \quad (15)$$

上式表明, 棱面度将随曲率半径增大而加大。即最大棱面度出现在齿顶部位, 而该处的曲率半径为

$$\rho_a = R \tan \alpha_a$$

或

$$\rho_a = \frac{m Z}{2} \cos \alpha \cdot \tan \alpha_a$$

式中 m —— 被加工齿轮的模数;

α —— 分圆压力角;

α_a —— 齿顶圆压力角, $\cos \alpha_a = \frac{Z \cos \alpha}{Z + 2f}$;

f —— 齿顶高系数。

将公式(1)中的切削角 ψ 、基圆半径 R 和齿顶处的展开角 $\theta_0 = \tan \alpha_a$ 代入公式(15), 即可求得齿顶处棱面度的计算公式, 得

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\tan\alpha_a}{4}\right)^2} \cdot \frac{\pi^2 m \cos\alpha}{Z(K/Z_T)^2}$$

3、与 Pohl 计算式的差异

F. Pohl^[1] 和 Б. А. ТАЙЦ^[2] 都推荐了下述棱面度的计算式, 即

$$\Delta_{Pohl} = \frac{\pi^2 m \cos\alpha \cdot \tan\alpha_a}{4Z(K/Z_T)^2} \quad (17)$$

上式主要作了下列假设:

1) 在成形切削角 ψ 范围内齿形的曲率半径是不变的, 即采用半径为 ρ_j 的圆来近似 ρ_j 和 ρ_{j-1} 之间的渐开线(见图2);

2) 将棱面度顶点的展开角用 $\theta = \theta_0 + \psi/2$ 来近似。

显然, 采用 $\rho_j \approx \rho_{j,j-1}$ 近似计算棱面度 Δ 时, 差值为 $R \cdot \psi/2$ 。它相对于微小量 Δ 来说是不可忽略的, 也不允许用下式来近似^{[1][2][3]}, 即

$$\Delta \approx \frac{\rho_j}{\cos\frac{\psi}{2}} - \rho_j$$

这就是 F. Pohl 和 Б. А. ТАЙЦ 计算式(17)不可靠的主要原因。

其次, 棱面度顶点的展开角 $\theta = \sqrt{\theta_1 \theta_0}$ (见公式(12)), 它处在

$$\theta_0 < \sqrt{\theta_1 \theta_0} < \frac{\theta_1 + \theta_0}{2} < \theta_1$$

位置。这是渐开线曲率半径随展开角 θ 增大而增加的缘故。而 $P(x_p, y_p)$ 并不位于 $(\theta_1 + \theta_0)/2$ 位置。若需减小棱面度(俗称“平整波度”), 则应在渐开线上 Q 点的切线位置(即在 $\rho_{j,j-1}$ 的法线方向)增加切削刃。可见, 它的正确位置有利于平整棱面度。

为了直观地了解本文推导的公式(16)与 Pohl 公式(17)差异, 现用文献[2]中的实例进行比较。

【示例】单头滚刀($K=8, Z_T=1$)滚切模数 $m=5$ 、齿数 $Z=15$ 的标准齿轮。

按 Pohl 式(17)算得齿顶的最大棱度为

$$\Delta_{Pohl} = 8.1 \mu m$$

它相当于 JB179-83 标准 6 级精度的齿形公差。按本文公式(16)计算结果为

$$\Delta = 18.0 \mu m$$

它相当于 JB179-83 标准 8 级精度的齿形公差。

值得注意的是, Pohl 公式计算得棱面度竟小于公式(16) 1.2 倍, 齿形精度相差二级。

4、减小滚齿棱面度的措施

包络理论渐开线的折线是影响棱面度的主要因素。公式(16)表明, 棱面度的大小取决于

两个条件:

- 1) 渐开线齿廓的曲率;
- 2) 包络理论渐开线折线的密度。

齿廓的曲率与齿数有关。齿轮的齿数愈多,滚齿过程中的切削角 ψ 愈小,棱面度也小,齿廓愈接近于理论渐开线。由于棱面度 Δ 与齿数 Z 是双曲关系,齿轮愈小,棱面度愈大。

折线的包络密度是与滚刀的容屑槽数平方成正比。即滚刀的容屑槽数增加一倍,棱面度将降低三倍。然而,标准阿基米德滚刀设计时,已确定了其容屑槽数;那么,唯一可取的途径是采取工艺措施来平整棱面度。

既然增加滚刀容屑槽数(即切削刃数)可以显著减小棱面度,那么,利用两次反向切削循环方法,即在第二次滚切时,将刀齿移位(见图3、4),相当于增加了切削刃数。具体措施是:第一次滚切结束后,将滚刀脱开展成运动链,滚刀附加转动($\sqrt{\theta_1\theta_0} - \theta_0$)

将滚刀脱开展成运动链,滚刀附加转动($\sqrt{\theta_1\theta_0} - \theta_0$)

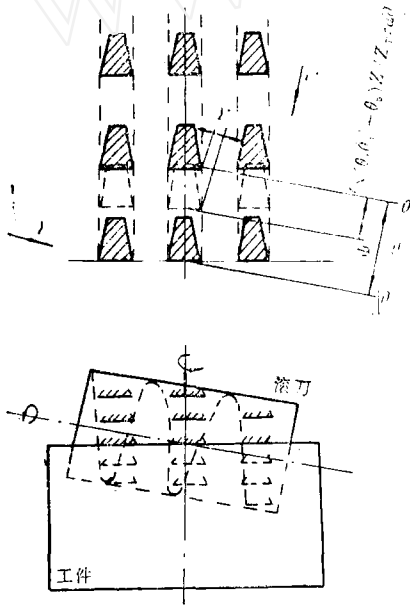


图 3

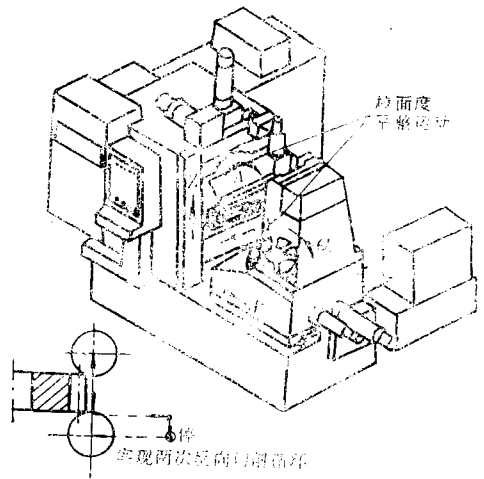


图 4

· Z/Z_T 角,而又轴向移位 $Y = rZ(\sqrt{\theta_1\theta_0} - \theta) \cdot \tan\lambda$ (式中, r 为滚刀外径, λ 为滚刀的螺旋升角),使滚刀刀齿与渐开线上 Q 点相切。这样,棱面度将减小三倍。

当前,正在发展 NC 滚齿机。它包括了五个控制运动,即径向进给运动(X 轴),轴向进给运动(Z 轴),滚刀的轴向运动(Y 轴),滚刀和工件的旋转运动(C 轴和 A 轴)(见图4)。那么,控制 Y 轴和 A 轴就可以平整滚齿过程的棱面度。这对提高滚齿机的工作精度是有利的。

5、结 束 语

- 1) Pohl 公式和图表已沿用了好多年。迄今为止,国内出版的文献书籍仍引用了这个

公式,是值得引起注意的。

2) 通常,棱面度对齿形误差的影响,出现在小齿轮的齿顶高部位。由于工件齿数和滚刀的参数业已确定,唯一有效的途径是采取工艺措施来平整棱面度对齿形误差的影响。

3) 建议在发展 NC 滚齿机时,考虑平整棱面度的措施。

参 考 文 献

- [1] G. Broersma: Manufacture and testing of gear, NIOI, Gent, Belgium. 1969. pp 41-43.
- [2] Б. А. Тайц: Точность и контроль зубчатых колес, Машиностроение, Москва, 1972. pp 62--65.
- [3] 经以广等: 滚齿齿面棱度成因分析, 《沈阳工业大学学报》, 7, 4 (1985).
- [4] 會田俊夫等: 《齿车的设计·制作(I)》, 大河出版刊(1971), pp 240-241.
- [5] 柏永新编著: 《齿轮精度与综合检验》, 上海科学技术出版社, 1986.
- [6] 吴大任著: 《微分几何讲义》, 人民教育出版社(第4版), 1982.

ANALYSIS OF RIDGY DISTANCES FROM THEORETICAL TOOTH FLANK IN HOBBIING PROCESS

Zhang Zhizhong Xu Yinfeng

Abstract

This paper deals with an analysis of the deviation from the involute form which appears between two enveloping positions of the hob teeth. The basic analysis cited the Pohl's formula and chart to calculate the distance of the ridges. Owing to omitting the influence of the difference between two curvature radii, it will be brought on the calculate error about one or two accuracy grades in the total profile error. Using the method of vector function obtained the ridgy distances and tried to improve the computational accuracy. Then the top ends of the ridge may be provided scientific basis for smoothing away the ridges.

Key words: ridgy distance, smoothing away the ridges.