文章编号: 1001-4098(2004)08-0010-04

连续网络上的占线可恢复加拿大旅行者问题*

苏 兵[1], 徐寅峰[1,2]

(1. 西安交通大学 管理学院, 陕西 西安 710049;
2. 西安交通大学 机械制造工程重点实验室, 陕西 西安 710049)

摘 要: 针对堵塞完全在无法预知的情况下一个个出现, 且堵塞恢复时间信息可以获取的占线可恢复加拿大旅行者问题, 给出连续网络上的等待策略和移动策略以及相应策略下的竞争比, 并对两种策略的执行效果进行分析和比较。

关键词: 连续网络; 占线; 可恢复加拿大旅行者问题; 竞争比

中图分类号: TB114.1 **文献标识码**: A

1 引言

加拿大旅行者问题(Canadian Traveler Problem, CTP)首先由C. H. Papadimitriou 和M. Yannakakis 在文献[1]中提出。CTP 是指旅行者按照一张给定的多路径地形图, 在从出发地到目的地的行走过程中, 遇到了由于突发事件(下雪导致道路交通阻塞)造成的某一既定行走路径堵塞的现象, 旅行者在到达这一路径前是无法预知这个事件的, 从而研究在这种不确定情况下如何设计一个有效行走方案的问题。可恢复加拿大旅行者问题(Recoverable Canadian Traveler Problem)是指堵塞的路径在一定时间后能够恢复, 而且恢复的时间是可知的。加拿大旅行者问题是可恢复加拿大旅行者问题的一个特例, 即堵塞恢复时间无限的长。对这类只知道当前信息而对未来一无所知, 又必须做出决策, 具有较强的动态特征的问题, 占线(online)问题与竞争策略的分析方法提供了一个新的解决思路。这种方法在变化因素的每一个特例中都能给出一个策略, 使用这一策略所得到的解离最优方案给出的解总在一定的比例之内[2,3]。对于可恢复加拿大旅行者问题, 文献[4]研究了每条边均以一定的概率发生堵塞且每个概率相互独立, 每条边的堵塞持续时间均小于该边通过时间的随机型可恢复加拿大旅行者问题, 给出了复杂度为 $O(m\log n)$(网络图的顶点数为 n, 边的个数为 m)的最小期望旅行时间的求解算法; 还分析了堵塞可恢复的确定型加拿大旅行者问题, 给出了最多有 k 条边堵塞, 每条边的堵塞持续时间均小于该边通过时间的最坏情形下的最小旅行时间算法, 并证明了算法的复杂性为 $O(k^2m + kn\log n)$(网络图的顶点数为 n, 边的个数为 m)。在用占线问题与竞争策略的分析方法对可恢复加拿大旅行者问题的讨论中, 文献[5]分析了堵塞只发生在一条特殊路径上的可恢复加拿大旅行者问题的等待策略、迂回策略和混合策略, 并对其相应的竞争性能进行了分析, 证明了混合策略的竞争性能优于等待策略和迂回策略的竞争性能。文献[6]分析了在堵塞恢复时间满足不同条件下的可恢复加拿大旅行者问题的等待策略与贪婪策略的执行效果。在以上的研究中, 都是将交通图抽象成一个一般的网络图 $G(V, E)$, 即网络图由节点(vertex)集合和连接这个点集合中的某些点对的连线(edge)构成, $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$为 G 的节点集, v_1 表示出发地, v_n 表示目的地, E 为 G 中边的集合, 对于 $e_{ij} \in E$, $i \neq j$, e_{ij}是不可分割的。即 v_i 从 v_l 到的路径是一个点和边的交替序列($v_i, e_{ij}, v_j, \cdots, v_k, e_{kl}, v_l$)。基于一般网络图的讨论约束性较强, 如果某一边上有堵塞发生, 旅行者只能在停在特定的地点(图中的堵塞边的起始节点处), 这与实际情形的差异是较大的。

本文研究的是基于连续网络图的占线可恢复加拿大旅行者问题, 在连续网络图中, 边是一条连续线段[6], 即堵塞可能发生在这条边的任意一个点上。本文用占线和竞争策略的分析方法, 考虑堵塞完全在无法预知的情况下一个

* 收稿日期: 2004-06-19
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371094; 70121001)
作者简介: 苏兵(1971-), 女, 山西人, 西安交通大学管理学院博士研究生。

个出现情形下的行走策略的制定。在第 2 节给出了连续网络图的定义及问题的数学模型, 第 3、第 4 节分别给出了等待策略和移动策略, 以及相应策略下的竞争比, 第 5 节对两种策略的竞争性能进行了分析和比较, 两种策略在不同情形下的执行效果各有优劣。同时, 与一般网络图上的基于同样假设的研究结果进行了比较。

2　问题描述和基本定义

假设旅行者由 v_1 城出发欲抵达目的地 v_n 城, 选择了一条由 v_1 到 v_n 的最优路径, 旅行者在沿着这条路径的行进过程中, 如果遇到因某一或一系列难以预测的突发事件造成的堵塞, 比如交通事故、自然灾害等, 假设堵塞是可以恢复的, 且旅行者在到达堵塞发生地时可以获取堵塞恢复时间的相关信息, 应制定怎样的对策?

记交通图为连续网络 $G(V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$为 G 中的节点集合, v_1 表示出发地, v_n 表示目的地, E 为 G 中边的集合, 对于 $e_{ij} \in E$, $i \neq j$, e_{ij}是一个连续的线段, v_i, v_j 为 e_{ij}的两个端点, $x_{ij}(p)$为 e_{ij}上一点, v_i 至 $x_{ij}(p)$的距离为 $\| v_i, x_{ij} \|$, $0< \| v_i, x_{ij} \| < \| v_i, v_j \|$, $p = \dfrac{\| v_i, x_{ij} \|}{\| v_i, v_j \|}$ $(0< p< 1)$ ($p= 0$ 或 $p= 1$ 时, 堵塞发生在节点处, 另有文章讨论), 线段 e_{ij}上点的位置示意图见图 1 示例。

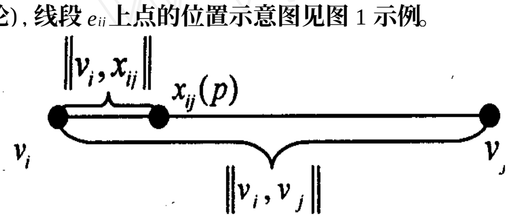

图 1　连续线段 e_{ij}上点的位置示意图

$\delta= (e_1', e_2', \cdots, e_i', \cdots, e_k')$, $e_i' = (v_i', v_i'')$表示发生堵塞的边的序列, e_{i+1}' 的发生时间在 e_i' 之后, $R(r_i(p_l))$ $(i= 1, 2, \cdots, k)$表示发生在 e_i'上的堵塞点序列, $r_i(p_l)$ $(l= 1, 2, \cdots, m)$表示第 i 条被堵塞的边上出现的第 l 个堵塞点, $t'(r_i(p_l))$表示 $r_i(p_l)$ $(l= 1, 2, \cdots, m)$的恢复时间, $t'(e_i')$ 表示堵塞边 e_i'上所有堵塞点的恢复时间之和, 即 $t'(e_i') = \sum_{l=1}^{m} t'(r_i(p_l))$, $t(e_i')$ 为无堵塞发生时通过边 e_i'的时间。为了便于讨论, 我们对费用、时间和距离不加以区分, 所有的讨论基于以下假设:

①堵塞在无法预知的情况下一个一个顺序出现;

②当遇到堵塞时, 旅行者可以从 $r_i(p_l)$ 按原路退回到 v_i';

③G 中去掉 e_i' 后, 仍然可以找到从 v_i' 到 v_n 的路径。

经典的占线问题竞争性能比是一个与序列事件无关的常数, 即存在与序列事件无关的常数 α 和 β 使得 $C_A(R) \leq \alpha C_{opt}(R) + \beta$成立, 则称 α为策略 A 的竞争性能比。文献[1]证明了加拿大旅行者问题在被堵塞的路径数量不确定情形下不存在常数竞争比。针对这个问题, 我们提出函数竞争比的定义。我们用 $C_{opt}(R)$表示占线问题对应的离线问题中 v_1 到 v_n 的最优费用, $C_A(R)$表示在策略 A 下 v_1 到 v_n 的总费用, 堵塞序列为 $\delta= (e_1', e_2', \cdots, e_i', \cdots, e_k')$, 如果存在一个与堵塞事件发生的个数有关的函数 $f(k)$, 使得

$$C_A(R) \leq f(k) C_{opt}(R)$$

则称 $f(k)$为策略 A 的竞争性能比。竞争性能比是对占线问题策略效用的衡量, 如果竞争性能比较大, 说明占线问题所采用策略的费用同与之对应的离线问题的最优费用的偏离较大。对于同一假设的成本费用问题来讲, $f(k)$越接近于 1, 竞争性能越好。

关于离线问题最优解的求解方法已另有文章讨论。我们用 $S(v_1, v_n)$表示在没有堵塞事件发生的情况下 v_1 到 v_n 的最优路径 SR 的费用, 如果有一个堵塞点出现, 那么 $C_{opt}(R)$一定不小于 $S(v_1, v_n)$。为了便于讨论, 我们用 $S(v_1, v_n)$代替 $C_{opt}(R)$。

3　等待策略

等待策略: 当遇到堵塞点时, 旅行者选择等待, 堵塞恢复后继续沿着 SR 行走。

3.1　竞争性能比分析

如果旅行者采用等待策略, 那么旅行者在堵塞边 e_i'上花费的等待时间就是堵塞恢复时间 $t'(e_i') = \sum_{l=1}^{m} t'(r_i(p_l))$, 在堵塞恢复时间满足一定的条件下, 如下引理成立:

引理 1　如果 $t'(e_i') \leq \alpha_i t(e_i')$ (α_i $(i= 1, 2, \cdots, k)$ 为常数, $\alpha_i > 0$), 则总的等待时间 $\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{m} t'(r_i(p_l))$ 小于等于 $\alpha S(v_1, v_n)$。

证明　$\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{m} t'(r_i(p_l)) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i t'(e_i') \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha t(e_i') \leq \alpha S(v_1, v_n)$, $\alpha = \max \alpha_i$

我们用 $C_W(R)$表示等待策略下 v_1 到 v_n 的费用。

定理 1　在满足 $t'(e_i') \leq \alpha_i t(e_i')$ (α_i $(i= 1, 2, \cdots, k)$ 为常数, $\alpha_i > 0$) 的条件下, 等待策略的竞争比为 $1+ \alpha$ ($\alpha= \max \alpha_i$)。

证明　根据已知条件可知等待策略下的总费用为

$$C_W(R) = S(v_1, v_n) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{m} t'(r_i(p_l)) \tag{1}$$

上式可以变形为

$$C_W(R) = \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{m} t'(r_i(p_l))}{S(v_1, v_n)} \right) S(v_1, v_n) \tag{2}$$

由引理 1 和(2)式可知:

$$C_W(R) \leq (1+\alpha)S(v_1, v_n) \quad (3)$$

当 $\alpha=1$ 时, 由定理 1 可得到如下推论:

推论 1 在满足 $t'(e_i) \leq t(e_i)$ 的条件下, 等待策略的竞争比为 2。

3.2 讨论

假设旅行者到达堵塞边 e_i 的起始节点的时间为 t_i, 堵塞发生的起始时间为 t_i', 堵塞结束时间为 t_i''。由 3.1 节可知, 当 $p \to 0$ 时, $t_i' \to t_i$, 车辆在接近 e_i 的起始节点处等待, 在这种情形下, 连续网络图上采用等待策略所花费的费用趋近于一般网络图上采用等待策略所花费的费用。当 $0<p<1$ 时, e_i 发生堵塞, 堵塞发生在 (t_i, t_i'') $(t_i< t_i' < t_i'')$ 上, 且 $t_i' < t(e_i) + t_i$ 时, 如果在一般网络图上, 旅行者只能在 e_i 的起始节点处等待, 旅行者的实际等待时间为 $t'(e_i) = t_i'' - t_i$, 与堵塞发生的起始时间无关; 如果在连续网络图上, 旅行者在 e_i' 上行至 $r_i(p_l)$ 时堵塞发生, 旅行者的实际等待时间为 $t'(e_i) = t_i'' - t_i'$。在这种情形下, 在连续网络图上采用等待策略的费用小于在一般网络图上采用等待策略的费用, 当 $p \to 1$ 时, 旅行者在一般网络图 e_i' 上的等待时间与在连续网络图 e_i' 上的等待时间的差趋于最大, 一般网络图与连续网络图上等待策略下的费用差异趋于最大。

4 移动策略

移动策略: 当面对堵塞时, 旅行者从不等待, 总在移动。即当堵塞出现在 e_i' 上的 $r_i(p_l)$ 时, 旅行者退回到 v_i' 并沿着一条从 v_i 到 v_n 的最短路径行走。

4.1 竞争性能比分析

当旅行者行至边 e_i' 上时, $r_i(p_l)$ 发生堵塞, 旅行者退回到 v_i', 并沿着一条重新选择的 v_i 到 v_n 的最短路径继续行走。用 $S'(r_i(p_l), v_n)$ 表示旅行者沿着选定的路径行走时因遇到堵塞点不能继续走完的选定路径剩余部分的费用, 用 $S'(r_1(p_1), v_n)$ 表示 SR 上从 $r_1(p_1)$ 到 v_n 的费用, 用 $S_1''(v_1, r_i(p_l))$ 表示移动策略下在 e_i' 上遇到第 l 个堵塞点时从出发点 v_1 到 $r_i(p_l)$ 已经走过路径的费用, 用 $S''(r_i(p_l), v_n)$ 表示从 $r_i(p_l)$ 退回到 v_i 的费用与从 v_i 到 v_n 最短路径费用的和。

我们用 $C_M(R)$ 表示移动策略下从 v_1 到 v_n 的费用。在最坏情形下, 也就是堵塞恰好都出现在我们每次新选择的路径上, 可以得到以下等式:

$$C_M(R) = S_1''(v_1, r_i(p_l)) + S''(r_i(p_l), v_n)$$

定理 2 在满足 $S''(r_i(p_l), v_n) \leq (1+\beta_i)(S'(r_i(p_l), v_n))$ $(\beta_i (i=1, 2, \cdots, k))$ 为常数, $\beta_i>0$) 的条件下, 移动策略的竞争比为 $(1+\beta)^k$ $(\beta=\max\beta_i)$。

证明 当仅有 1 个堵塞 $r_1(p_1)$ 出现时, 可知

$$C_M(R_1) = S_1''(v_1, r_1(p_1)) + S''(r_1(p_1), v_n)$$

$$\begin{aligned} C_M(R_1) &\leq S(v_1, r_1(p_1)) + (1+\beta)S(r_1(p_1), v_n) \\ &\leq (1+\beta)S(v_1, v_n) \end{aligned}$$

当有 2 个堵塞边出现时, 可知

$$\begin{aligned} &C_M(R_2) \\ &= S_1''(v_1, r_2(p_l)) + S''(r_2(p_l), v_n) \\ &\leq S(v_1, r_1(p_1)) + S'(r_1(p_1), r_2(p_l)) \\ &\quad + (1+\beta)S'(r_2(p_l), v_n) \\ &\leq S(v_1, r_1(p_1)) + S'(r_1(p_1), v_n) + \beta S'(r_2(p_l), v_n) \\ &\leq S(v_1, r_1(p_1)) + (1+\beta)S(r_1(p_1), v_n) \\ &\quad + \beta(1+\beta)S(r_1(p_1), v_n) \\ &= S(v_1, v_2) + \beta S(r_1(p_1), v_n) + \beta(1+\beta)S(r_1(p_1), v_n) \\ &\leq S(v_1, v_2) + \beta S(v_1, v_n) + \beta(1+\beta)S(v_1, v_n) \\ &\leq (1+\beta)^2 S(v_1, v_n) \end{aligned}$$

依次类推, 当有 k 个堵塞边时, 可得

$$C_M(R) \leq (1+\beta)^k S(v_1, v_n)$$

4.2 讨论

由 4.1 节可知, 当 $p \to 0$ 时, $t_i' \to t_i$, 此时 $S''(r_i(p_l), v_n) \to S''(v_i', v_n)$, 在这种情形下, 连续网络图上采用移动策略所花费的费用趋近于一般网络图采用移动策略所花费的费用。当 $0<p<1$ 时, e_i 发生堵塞, 堵塞发生在 (t_i, t_i'') $(t_i< t_i' < t_i'')$ 上, 且 $t_i' < t(e_i) + t_i$ 时, 如果在一般网络图上, 旅行者总在 e_i 的起始节点 v_i 处寻找一条到 v_n 的最短路径行走, 如果在连续网络图上, 旅行者在 e_i' 上行至 $r_i(p_l)$ 时堵塞发生, 旅行者需首先退回到 v_i', 然后从 v_i 寻找一条到 v_n 的最短路径行走, 在这种情形下, 在连续网络图上采用移动策略的费用大于在一般网络图上采用移动策略的费用。当 $p \to 1$ 时, 连续网络图上的旅行者退回时间最长, 趋近于 $t(e_i)$, 与一般网络图上的移动策略下的费用差异趋于最大。

5 策略分析与比较

由以上的讨论可知, 等待策略的竞争性能与堵塞点出现的个数和位置无关。当 α 远远小于 1 时, 等待策略下的费用接近于无堵塞事件发生时的最优费用, 当 $\alpha=1$ 时, 不超过最优费用的 2 倍。当 α 远远大于 1 时, 从定理 1 可知, 采用等待策略花费的总费用主要依赖于所有的等待时间之和与无堵塞事件发生时的最优费用的比值, 而不仅仅取决于 α 的大小。在一些情况下, α 可能非常大, 但等待策略依然非常有效, 比如只在某一点发生了重大交通事故, 而其他的堵塞恢复时间均比较短的情形; 但当每个堵塞点的恢复时间都非常长, 即 α_i 都非常大时, 等待策略的效用较差。

移动策略的竞争性能比随着堵塞个数的增多以几何级数递增。但当 β 远远小于 1 时, 移动策略下的费用接近于无堵塞事件发生时的最优费用, 即遇到堵塞后, 总是能

找到一条与未走完的选定路径剩余部分的费用比较接近的新路径。当 $\beta \geq 1$ 时, 移动策略的竞争性能是比较差的, 即重新寻找的路径的费用较大, 而且堵塞总是发生在这条新的路径上。由定理 2 可知, 采用移动策略花费的总费用不仅仅取决于 β 的大小, 在一些情况下, β 可能非常大, 但移动策略依然有效, 比如只遇到 1 次堵塞, 重新寻找的路径的费用比较大, 但这条路上再没有堵塞发生的情形。

等待策略与移动策略各有优势, 在一般情况下, 采用等待策略的费用优于采用移动策略的费用。在现实中, 人们往往采用移动策略, 即遇到突发事件造成交通堵塞时, 不愿在原地等候而重新选择一条新的行进路线, 而且总是认为自己节省了很多时间, 这种现象反映出人对突发事件所造成的后果控制没有准确的心理预期, 也反映出人的一种普遍认知, 即认为等待造成的机会损失远远大于行事过程中的损失, 当然, 采用移动策略也反映出人们对突发事件的应对不坐等视之而积极应对的心理。

文献[6]给出的等待策略与本文给出的等待策略具有相互补充的意义, 前面已经进行了分析。文献[6]给出的贪婪策略基于与本文等待策略相同的恢复时间假设, 策略的竞争比为 $(1+\alpha)^k$, 这个贪婪策略的效果取决于堵塞恢复时间的长短, 强调了与等待策略执行效果的比较。本文给出的移动策略的假设与堵塞恢复时间无关, 更注重考虑重新选择的路径的费用。

6　结论

堵塞无法预测的路径选择问题是运输管理的难题, 如何将理论结果更好地运用到实际中是一个值得关注的问题, 本文基于连续网络图上的加拿大旅行者问题的讨论是在这方面的探索, 它比基于一般网络图的讨论更具有实际意义。针对连续网络上的占线可恢复加拿大旅行者问题, 本文对等待策略和移动策略及其相应的竞争性能进行了分析, 并对两种策略在不同情形下的执行效果进行了比较, 其各有利弊, 人们可以根据实际情况选择合适的策略。本文的讨论还有待于进一步深入, 如堵塞不可恢复的加拿大旅行者问题, 都是需要研究的问题。

参考文献:

[1] Papadimitriou C H, Yannakakis M. Shortest paths without a map[A]. Proc. 16th ICALP, Lect Notes in Comp. Sci No. , 1989, 372: 610～620.

[2] Manasse M S, McGeoch L A, Sleator D D. Competitive algorithms for server problems[J]. Journal of Algorithms, 1990, 11: 208～230.

[3] David S B, Borodin A. A new measure for the study of the on-line algorithm[J]. Algorithmic, 1994, 11: 73～91.

[4] Amotz B N, Schieber B. The Canadian traveller problem[A]. Proc. the second annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms[C]. 1991: 261～270.

[5] Su B, Xu Y F, Xu Y, Zhu Z J. Online recoverable Canadian traveler problem on a road[J]. Information, 2004, 7(4).

[6] 苏兵, 徐渝, 徐寅峰. 联机可恢复加拿大旅行者问题的研究[J]. 系统工程理论与实践, 2004.

[7] Chrobak M, Larmore L L. An optimal on-line algorithm for K-servers on trees[J]. SIAM J. Comput, 1991, 20(1): 144～148.

Online Recoverable Canadian Traveler Problem on a Continuous Network

SU Bing[1], XU Yin-feng[1,2]

(1. School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. The State Key Lab for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an 710049, China)

Abstract: The online Recoverable Canadian Traveler Problem (RCTP for short) is considered for the case when the blocked edges occur one by one without any predictable information except its recover time. From the online point of view, the Waiting strategy and the Moving strategy are proposed and the competitive ratios of the two strategies are given based on a continuous network, and we analyze and compare the performance of two strategies.

Key words: Continuous Network; Online; Recoverable Canadian Traveler Problem; Competitive Ratio