文章编号:1000-6788(2005)10-0108-06

堵塞恢复时间随机的在线加拿大旅行者问题

苏　兵[1],徐寅峰[1,2]

(1. 西安交通大学管理学院,陕西 西安 710049;2. 机械制造系统工程国家重点实验室,陕西 西安 710049)

摘要: 针对旅行者在行走过程中遇到的某一或一系列无法预知堵塞事件的加拿大旅行者问题,考虑每个堵塞恢复时间是一个相互独立随机变量的情形,从在线问题与竞争策略的角度,给出了每个堵塞恢复时间都为均匀分布下的等待策略和贪婪策略以及相应策略下的竞争比,并对两种策略的执行效果进行了分析和比较.

关键词: 堵塞恢复时间随机;在线加拿大旅行者问题;竞争比

中图分类号: TB114.1　　**文献标识码**: A

Online Canadian Traveler Problem with Stochastic Blockages Recovery Time

SU Bing[1], XU Yin-feng[1,2]

(1. School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. The State Key Lab for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an 710049, China)

Abstract: The online Canadian Traveler Problem (CTP for short) is considered for the case when the traveler meets some unexpected accident or a series of unexpected accidents during the travel process. From the online point of view, The Waiting strategy and the Greedy strategy are proposed and the competitive ratios of the two strategies are given based on the assumption that each blockage recovery time is a uniform distributed, and the performance of these two strategies are analyzed and compared.

Key words: stochastic blockage recovery time; online canadian traveler problem; competitive ratio

1　引言

加拿大旅行者问题(Canadian Traveler Problem,简称 CTP)首先由 C. H. Papadimitriou 和 M. Yannakakis 在文献[1]中提出. CTP 是指旅行者在一交通网络从出发地到目的地的行走过程中,遇到了由于突发事件造成的某一或一系列边堵塞的现象,旅行者在到达这些边的起始节点前是无法预知这个事件的,从而研究在这种不确定情况下如何设计一个有效行走方案的问题. 对这类具有较强动态特征的问题,目前有两类解决办法,一类是从离线问题的角度出发,根据经验数据对路径发生堵塞的概率进行预测或是对因堵塞造成的车辆行驶速度及行驶时间的变化进行估计,求出最小旅行时间的数学期望. 文献[2]研究了每条边均以一定的概率发生堵塞且每个堵塞的发生相互独立,每条边的上的堵塞持续时间均小于该边通过时间的可恢复加拿大旅行者问题,给出了复杂度为 $O(m\log n)$ (网络图的顶点数为 n,边的个数为 m)的最小旅行时间期望的求解算法;Laporte 在文献[3]中,对车辆旅行时间概率分布具有一定约束的车辆路径问题进行了研究,建立了机会约束模型并进行了求解,文献[4]在此基础上提出了一个考虑车辆容量的机会约束模型,并给出了算法. 另一类是从在线(online)问题与竞争策略的角度出发,考虑对堵塞发生的信息一无所知,即堵塞完全在无法预知的情况下一个一个顺序出现时的策略制定,这种方法在变化因素的每一个特例中都能给出一个策略,使用这一策略所得到的解离最优方案给出的解总在一定的比例之内[5,6]. 在堵塞为可恢复的假设条件下,文献[7]分析了堵塞只发生在一条特殊路径上的可恢复加拿大旅行者问题的等待策略、迂回

收稿日期:2004-07-21

资助项目:国家自然科学基金(10371094,70471035)

作者简介:苏兵(1970 -),女,山西人,博士,从事运输管理中的在线问题研究.

策略和混合策略,并对其相应的竞争性能进行了分析. 文献[8]给出了连续网络上的等待策略和移动策略以及相应策略下的竞争比,并对两种策略的执行效果进行了分析和比较. 在这些研究中,在线的方法都假设旅行者在到达堵塞发生地时可以获取关于堵塞恢复时间的确定信息,这个假设与现实差异较大,因为旅行者很难对堵塞恢复时间做出准确的判断. 针对这种情况,可以通过对每条边堵塞恢复时间的历史数据进行统计和分析,寻找堵塞恢复时间的统计规律,并依据这些统计规律制定出有效的行走策略. 堵塞恢复时间确定可作为堵塞恢复时间随机的特例.

本文用在线和竞争策略的方法,针对旅行者在行走过程中遇到的某一或一系列无法预知堵塞事件的加拿大旅行者问题,考虑每个堵塞恢复时间是一个相互独立的随机变量的情形,第 2 节给出了堵塞恢复时间随机的在线加拿大旅行者问题的定义及数学模型,第 3、第 4 节分别给出了每个堵塞恢复时间都为均匀分布下的等待策略和贪婪策略,以及相应策略下的竞争比.

2　问题描述和基本定义

假设旅行者由 v_1 城出发欲抵达目的地 v_n 城,选择了一条由 v_1 到 v_n 的最优路径,旅行者在沿着这条路径的行进过程中,如果遇到因某一或一系列难以预测的突发事件造成的堵塞,比如交通事故、自然灾害等,假设堵塞是可以恢复的,且堵塞恢复时间是一个随机变量,旅行者在到达堵塞边的起始节点时可以获取堵塞恢复时间的分布律,应制定怎样的行走策略?

给定一交通网络 $G(V,E)$, $V=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$为 G 中的节点集合, v_1 表示出发地, v_n 表示目的地, E 为 G 中边的集合; $G(V,E)$ 中一共出现堵塞的最多次数为 k,旅行者遇到堵塞的次数为 h,则 $h\le k$, $R=(e_1,e_2,\cdots,e_i,\cdots,e_h)$ $e_i=(x_i,y_i)$ 表示遇到的堵塞边序列, x_i 表示 e_i 的起始节点, y_i 表示 e_i 的终节点, e_{i+1} 的发生时间在 e_i 之后;堵塞边 e_i 的恢复时间为随机变量 t'_i;无堵塞发生时通过边 e_i 的时间为 t_i. 为了便于讨论,对时间和费用不加以区分,所有的讨论基于以下假设:

1) 堵塞在无法预知的情况下一个一个顺序出现;

2) G 中去掉 e_i 后,仍然可以找到从 x_i 到 v_n 的路径;

3) 每条堵塞边的堵塞恢复时间服从均匀分布;

4) 每个堵塞的恢复时间是相互独立的随机变量.

经典的在线问题竞争性能比是一个与序列事件无关的常数,即存在与序列事件无关的常数 α 和 β 使得 $C_A(R)\le\alpha\cdot C_{opt}(R)+\beta$ 成立,则称 α 为策略 A 的竞争性能比. 文献[1]证明了加拿大旅行者问题在被堵塞的边数量不确定情形下不存在常数竞争比. 针对这个问题,提出函数竞争比的定义. 用 $C_{opt}(R)$ 表示在线问题对应的离线问题中 v_1 到 v_n 的最优费用, $C_A(R)$ 表示在策略 A 下 v_1 到 v_n 的总费用,堵塞序列为 $R=(e_1,e_2,\cdots,e_i,e_h)$,如果存在一个与堵塞事件发生的个数有关的函数 $f(k)$,使得如下关系式成立:

$$C_A(R)\le f(k)\cdot C_{opt}(R),$$

则称 $f(k)$ 为策略 A 的竞争性能比. 竞争性能比是对在线问题策略效用的衡量,如果竞争性能比较大,说明在线问题所采用策略的费用同与之对应的离线问题的最优费用的偏离较大. 对于同一假设的成本或费用问题来讲, $f(k)$ 越接近于 1 竞争性能越好.

关于离线问题最优解的求解方法已另有文章讨论. 用 $S(v_1,v_n)$ 表示在没有堵塞事件发生的情况下 v_1 到 v_n 的最优路径 SR 的费用,如果有一个堵塞点出现,那么 $C_{opt}(R)$ 一定不小于 $S(v_1,v_n)$.

3　等待策略

等待策略:当遇到堵塞时,旅行者选择等待,堵塞恢复后继续沿着 SR 行走.

3.1　竞争性能比分析

当堵塞出现时,旅行者选择在堵塞边的起始节点等待,每条被堵塞边上的等待时间就是该边的堵塞恢复时间,因为每个堵塞恢复时间是一个随机变量,因此,将每个堵塞的恢复时间期望[9] $E(t'_i)$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 做为每条被堵塞边上等待时间的期望. 在等待策略下,旅行者总费用的期望是遇到堵塞产生的所有等待时间之和的期望与 $S(v_1,v_n)$ 的和,等待时间的和的期望为 $E(t'_1+t'_2+\cdots+t'_h)$,因为每个堵塞恢复时

间是相互独立的随机变量,则有 $E(t_1'+t_2'+\cdots+t_h')=E(t_1')+E(t_2')+\cdots+E(t_h')$成立,即所有等待时间和的期望就是每个等待时间期望的和.

用 $C_W(R)$表示等待策略下 v_1 到 v_n 总费用的期望,用 h 表示旅行者遇到的堵塞边的个数,则等待策略下总费用的期望为:

$$C_W(R)=S(v_1,v_n)+\sum_{i=1}^{h}E(t_i'),\qquad h\le k.$$

用 α_i 表示 e_i 边上最小堵塞恢复时间 $\min(t_i')$与 t_i 的比值,用 β_i 表示 e_i 边上最大堵塞恢复时间 $\max(t_i')$与 t_i 的比值,堵塞恢复时间在区间$(\alpha_i t_i,\beta_i t_i)$ $(\alpha_i,\beta_i(i=1,2,\cdots,h),h\le k$ 为常数,$\alpha_i\ge 0,\beta_i>0)$上服从均匀分布,则可以得到以下引理.

引理 1 如果堵塞恢复时间 t_i'在区间$(\alpha_i t_i,\beta_i t_i)$上服从均匀分布,$\alpha_i,\beta_i$ 为常数,$\alpha_i\ge 0,\beta_i>0$,则在 e_i 等待时间的期望为 $E(t_i')=\dfrac{\alpha_i+\beta_i}{2}t_i$, $i=1,2,\cdots,h$ 且 $h\le k$.

从而进一步证明得到以下定理.

定理 1 如果堵塞恢复时间 t_i'在区间$(\alpha_i t_i,\beta_i t_i)$上服从均匀分布,$\alpha_i,\beta_i$ 为常数,$i=1,2,\cdots,h$ 且 $h\le k$,$\alpha_i\ge 0,\beta_i>0$,则等待策略的竞争比为 $1+\dfrac{\alpha+\beta}{2}$,其中 $\alpha=\max\alpha_i$,$\beta=\max\beta_i$.

证明 等待策略下总费用的期望为:

$$C_W(R)=S(v_1,v_n)+\sum_{i=1}^{h}E(t_i'),\qquad h\le k.\tag{3.1}$$

上式可以变形为:

$$C_W(R)=\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{h}E(t_i')}{S(v_1,v_n)}\right)\cdot S(v_1,v_n).\tag{3.2}$$

由引理 1 和(3.2)式可知:

$$C_W(R)=\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{h}\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}t_i}{S(v_1,v_n)}\right)\cdot S(v_1,v_n).$$

所以:

$$C_W(R)\le\left(1+\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}\sum_{i=1}^{h}t_i}{S(v_1,v_n)}\right)\cdot S(v_1,v_n),$$

即

$$C_W(R)\le\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot S(v_1,v_n).\tag{3.3}$$

从以上证明过程可以得到等待策略的竞争比为 $1+\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

如果堵塞恢复时间确定,则有 $\alpha=\beta$,由此可得到以下推论.

推论 1 等待策略在满足 $t_i'=\alpha\cdot t_i$ 时,其竞争比为 $1+\alpha$.

当 $\alpha=1$ 时,进而可得到以下推论.

推论 2 等待策略在满足 $t_i'=t_i$ 时,其竞争比为 2.

3.2 讨论

由 3.1 节的分析可知,因为每个堵塞恢复时间的期望是该堵塞所有可能恢复时间的均值,竞争比 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$反映的是在线问题等待策略下总费用的期望与对应的离线问题的最优费用的比值.等待策略与堵塞边出现的个数和位置无关.即不论在行走过程中的什么位置,遇到多少次因突发事件造成的路径堵塞,旅行者花费的总费用的期望仅与策略的执行效果有关.从定理 1 可知,等待策略总费用的期望主要依赖于在每个堵塞处等待时间的期望之和与无堵塞事件发生时对应的离线问题最优费用的比值,而不仅仅取决于

α和β的大小. 因为随机变量 t_i'在区间$(\alpha_i t_i, \beta_i t_i)$ $(\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2, \cdots, k)$为常数, $\alpha_i \geq 0, \beta_i > 0)$上服从均匀分布, 当 t_i 很小, 且 α_i, β_i 都很小, 即$\frac{\alpha+\beta}{2}$远远小于 1 时, 等待策略的期望费用(时间)接近于无堵塞事件发生的离线问题的最优费用, 这种情形下采用等待策略较为理想. 当$\frac{\alpha+\beta}{2}$远远大于 1 时, 在一些情况下, 等待策略依然非常有效, 如当 t_i 都很小, 某一个 α_i, β_i 很大时的情形, 比如只在某一点发生了重大交通事故, 而其他的堵塞恢复时间的期望均比较小; 但当每个堵塞恢复时间的期望都非常大时, 等待策略的效用较差. 当 t_i 都很小, α_i, β_i 都很大时或者 t_i 都很大, α_i, β_i 都很小时, 虽然这两种情形下$\frac{\alpha+\beta}{2}$的值不同, 但等待策略的执行效果是相近的.

4　贪婪策略

4.1　竞争性能比分析

贪婪策略: 当面对堵塞时, 旅行者选择费用期望小的路径做为行走策略.

即当旅行者沿着 SR 行进至边 e_i 时, 该边发生堵塞, 这时旅行者可以选择在原地等待或沿着一条重新选择的 x_i 到 v_n 的路径继续行走. 如果旅行者在原地等待, 直到堵塞边恢复, 继续按照原先选定的路径行走, 用 $L'(x_i, v_n)$ 表示旅行者沿着选定的路径行走时因遇到堵塞点不能继续走完的选定路径的剩余部分, $E[L'(x_i, v_n)]$表示 $L'(x_i, v_n)$ 费用的期望, 则等待情形下从 x_i 到 v_n 通过时间的期望为 $E[L'(x_i, v_n)] + E(t_i')$; 如果寻找一条从 x_i 到 v_n 最小通过时间的期望的路径, 用 $L''(x_i, v_n)$ 表示这条路径, 用 $E[L''(x_i, v_n)]$ 表示其最小通过时间的期望, 则贪婪策略是指旅行者选择的路径是 $\min\{E[L'(x_i, v_n)] + E(t_i'), E[L''(x_i, v_n)]\}$.

用 $C_G(R)$ 表示这种贪婪策略从 v_1 到 v_n 总行走费用的期望, $L(v_1, x_i)$ 表示当第 i 条堵塞边出现时从出发点 v_1 到 x_i 已经走过路径, $E[L(v_1, x_i)]$表示 $L(v_1, x_1)$ 通过时间的期望, 用 $S(v_1, x_1)$ 表示最优路径 SR 上 v_1 到 x_1 的费用, $S(x_1, v_n)$ 表示最优路径 SR 上 x_1 到 v_n 的费用. 假设每次遇到堵塞时, 旅行者都不是在原地等待堵塞边恢复而是重新选择一条新路径, 即总有下式成立:

$$E[L''(x_i, v_n)] \leq E[L'(x_i, v_n)] + E(t_i'), \qquad i = 1, 2, \cdots, h \text{ 且 } h \leq k.$$

在最坏情形下, 旅行者在每次新选择的路径总是遇到堵塞, 可以得到以下等式:

$$C_G(R) = E[L(v_1, x_i)] + E[L''(x_i, v_n)], \qquad i = 1, 2, \cdots, h \text{ 且 } h \leq k.$$

定理 2　如果堵塞恢复时间 t_i'在区间$(\alpha_i t_i, \beta_i t_i)$上服从均匀分布, α_i, β_i 为常数, $i = 1, 2, \cdots, h$ 且 $h \leq k$, $\alpha_i \geq 0, \beta_i > 0$, 则贪婪策略的竞争比为$\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^k$, 其中 $\alpha = \max\alpha_i, \beta = \max\beta_i$.

证明　当仅有一个堵塞边 e_1 出现时, 可知:

$$C_G(e_1) = E[L(v_1, x_1)] + E[L''(x_1, v_n)], \tag{4.1}$$

因为

$$E[L''(x_1, v_n)] \leq E[L'(x_1, v_n)] + E(t_1'), \tag{4.2}$$

且

$$t_1 \leq E(L'(x_1, v_n)),$$

由引理 1 和式(4.1)可知:

$$E[L''(x_1, v_n)] \leq \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}\right) E[L'(x_1, v_n)]. \tag{4.3}$$

因为堵塞第 1 次发生且仅一次出现所以有

$$E[L(v_1, x_1)] = S(v_1, x_1),$$
$$E[L'(x_1, v_n)] = S(x_1, v_n).$$

由 4.1 式和 4.3 式可知,

$$C_G(e_1) \leq S(v_1, x_1) + \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}\right) S(x_1, v_n) = S(v_1, v_n) + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} S(x_1, v_n)$$

且
$$S(x_1, v_n) \le S(v_1, v_n).$$
所以
$$C_G(e_1) \le \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}\right) S(v_1, v_n) \le \left(1 + \frac{\alpha + \beta}{2}\right) S(v_1, v_n).$$
当有且仅有 2 个堵塞边出现时,可知:
$$C_G(e_1, e_2) = \mathrm{E}[L(v_1, x_2)] + \mathrm{E}[L''(x_2, v_n)]$$
$$\le \mathrm{E}[L(v_1, x_2)] + \mathrm{E}[L'(x_2, v_n)] + \mathrm{E}(t_2').$$
因为
$$\mathrm{E}[L'(x_2, v_n)] = \mathrm{E}[L''(x_1, v_n)] - \mathrm{E}[L''(x_1, x_2)],$$
$$\mathrm{E}[L(v_1, x_2)] = \mathrm{E}[L(v_1, x_1)] + \mathrm{E}[L''(x_1, x_2)],$$
所以
$$C_G(e_1, e_2) \le \mathrm{E}[L(v_1, x_1)] + \mathrm{E}[L''(x_1, v_n)] + \mathrm{E}(t_2').$$
因为
$$\mathrm{E}(t_2') = \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2} t_2,$$
$$t_2 \le \mathrm{E}[L''(x_1, v_n)],$$
可得
$$C_G(e_1, e_2) \le \mathrm{E}[L(v_1, x_1)] + \left(1 + \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2}\right) \mathrm{E}[L''(x_1, v_n)].$$
因为
$$\mathrm{E}[L''(x_1, v_n)] \le \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}\right) \mathrm{E}[L'(x_1, v_n)],$$
$$\mathrm{E}[L(v_1, x_1)] = S(v_1, x_1),$$
$$\mathrm{E}[L'(x_1, v_n)] = S(x_1, v_n),$$
$$\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\},$$
$$\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\},$$
所以
$$C_G(e_1, e_2) \le \left(1 + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 S(v_1, v_n).$$
依次类推可得:
$$C_G(e_1, e_2, \cdots, e_h) \le C_G(e_1, e_2, \cdots, e_k) \le \left(1 + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^k S(v_1, v_n),$$
即
$$C_G(R) \le \left(1 + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^k S(v_1, v_n).$$

从以上证明过程可以得到贪婪策略的竞争比为$\left(1 + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^k$.

如果堵塞恢复时间确定,则有 $\alpha = \beta$,由此可得到以下推论.

推论 3 贪婪策略在满足 $t_i' = \alpha \cdot t_i$ 时,其竞争比为 $(1 + \alpha)^k$.

当 $\alpha = 1$ 时,进而可得到以下推论.

推论 4 贪婪策略在满足 $t_i' = t_i$ 时,其竞争比为 2^k.

4.2 讨论

由 4.1 节的分析可知,贪婪策略下的竞争性能比是一个与旅行者遇到的堵塞边数量 h 有关但与堵塞发生位置无关的函数,即 $f(k) = \left(1 + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^h$. 贪婪策略的竞争性能比随着 h 增大以几何级数递增. 但当$\frac{\alpha + \beta}{2}$远远小于 1 时,贪婪策略下的费用接近于无堵塞事件发生时的最优费用. 当$\frac{\alpha + \beta}{2} \ge 1$ 时,贪婪策略的竞争性能是比较差的,即旅行者总是在重新选择的路径上遇到堵塞. 由定理 2 可知,采用贪婪策略花费的总费用不仅仅取决于$\frac{\alpha + \beta}{2}$的大小,在一些情况下,$\frac{\alpha + \beta}{2}$可能非常大,但贪婪策略依然有效,如在整个行走过程中,只遇到 1 次堵塞,这次堵塞的时间较长,但由堵塞发生地开始重新选择的到终点的行走路径费用的期望较小的情形.

5　结论

堵塞恢复时间因其可变性较强成为可恢复加拿大旅行者问题制定行走策略的关键因素,本文在堵塞恢复时间是一个随机变量的假设前提下,从在线问题和竞争策略的角度给出了每个堵塞相互独立,且每个恢复时间都满足均匀分布的可恢复加拿大旅行者问题的等待策略和贪婪策略. 从等待策略和贪婪策略竞争比的理论结果来看,采用等待策略的费用优于采用贪婪策略的费用. 但是,从对采用两种策略的执行效果的讨论中可以得出,在不同的情形下,单独采用某一种策略有着不同的效用,贪婪策略也可能获得较好的效用,而等待策略的效用也可能很差,这也解释了为什么在现实中的很多情形,人们往往采用贪婪策略的原因. 本文的讨论还有待于进一步深入,如堵塞时间满足什么样的分布更接近于现实,是需要研究的问题.

参考文献:

[1]　Papadimitriou C H, Yannakakis M. Shortest paths without a map[A]. Proc. 16th ICALP[C]. Lect Notes in Comp. Sci, 1989, 372: 610 - 620.

[2]　Bar-Noy A, Schieber B. The canadian traveller problem[A]. Proc. The Second Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms [C], 1991: 261 - 270.

[3]　Laporte G, Louveaux F, Mercure H. The vehicle routing problem with stochastic travel times [J]. Transportation Science, 1992, 26 (3): 161 - 170.

[4]　郭强,谢秉磊. 随机旅行时间的车辆路径选择问题的模型及其算法[J]. 系统工程学报, 2003, 18(3): 244 - 247.
Guo Q, Xie B L. Model and algorithm of vehicle routing problem with stochastic traveler time [J]. Journal of System Engineering, 2003, 18(3): 244 - 247.

[5]　Manasse M S, McGeoch L A, Sleator D D. Competitive algorithms for server problems[J]. Journal of Algorithms, 1990, 11: 208 - 230.

[6]　David S B, Borodin A. A new measure for the study of the on-line algorithm [J]. Algorithmic, 1994, 11: 73 - 91.

[7]　Su B, Xu Y F, Xu Y, Zhu Z J. Online recoverable canadian traveler problem on a road[J]. Information, 2004, 7(4): 477 - 486.

[8]　苏兵,徐寅峰. 连续网络上的占线可恢复加拿大旅行者问题[J]. 系统工程, 2004, 22(8): 10 - 13.
Su B, Xu Y F. Online recoverable canadian traveler problem on a continuous network [J]. System Engineering, 2004, 22(8): 10 - 13.

[9]　盛骤,谢式千,潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 北京,高等教育出版社, 1997.
Sheng Z, Xie S Q, Pan C Y. Symbolic Statistics and Probability Theory[M]. Beijing, High Education Publishing, 1997.