带预期的占线周期性折扣租赁策略研究[1]

徐寅峰，张兴国，董玉成，郑斐峰
(西安交通大学 管理学院,陕西 西安，710049)

摘要: 在雪橇租赁模型基础上，考虑占线决策者还可以以 T 天为周期进行租赁，租赁价格具有一定折扣的租赁选择。本文给出了这种租赁模型下的确定性竞争策略，并证明其具有最优竞争比。进一步建立了带预期的占线租赁模型，针对租赁者的不同预期设计策略并分析其竞争性能。

关键词： 占线策略；竞争比；风险；雪橇租赁

中图分类号： F713　　　　　　**文献标识码：** A

1 引言

著名的滑雪橇租赁问题（The Ski Problem）首先由 Karp 提出并展开了研究，它是一个典型的占线决策问题[1]。一个滑雪初学者，不知道他将对这种业余运动会感兴趣多长时间，即不知道他会滑雪多少次。因此，他每次去滑雪时都会面临两种选择，要么每次花费 c 个单位的成本租借滑雪撬，要么用 P 个单位的成本一次性购买滑雪撬。一旦选择后者，则问题结束。假设他将滑雪 h 次，那么存在以下两种情形。第一种情形下 h 已知，则此问题称为离线租赁问题。令 $k = P/c$ 且为正整数（本文中均假设 k 为正整数），容易知道：若 $h \ge k$ 则选择买，否则选择租。但是，第二种情形是 h 未知，在这种情形下的决策问题称为占线租赁问题。通俗地讲，占线问题是指决策者在任何时刻的决策行为只能基于此前的输入信息，而对未来输入一无所知的一类决策优化问题。求解占线问题的有效策略通常称为占线策略，并用竞争比指标衡量策略性能。占线策略的竞争分析与传统求解此类问题方法的最大区别在于：前者对于变化因素的每一个特例都能给出一个方案,对应的解离最优方案给出的解总在一定的比例之内，即该方案对于问题的任意输入情形始终保持较优的性能。

滑雪橇租赁问题考察的是租赁成本，下面根据成本目标给出占线策略的相关定义。对于成本最小化问题 P 与某一个占线策略 A，如果对于任何的有限长度输入序列 δ，存在常数 r 使得策略 A 与离线最优策略 OPT 的成本满足 $\mathrm{Cost}_{\mathrm{A}}(\delta) \le r \cdot \mathrm{Cost}_{\mathrm{OPT}}(\delta)$，则称 A 为 r 竞争策略或者具有竞争比 r。如果某一个占线策略 B 的竞争比满足 $r^* = \inf_A(\mathrm{r})$，则称 B 为该问题的最优占线策略，并将 r^* 称为问题的最优竞争比[2]。

Karp 给出了滑雪橇租赁问题中最优的确定性竞争策略：即先租 k-1 次，然后在第 k 次滑雪时购买。此策略的竞争比为 $2-1/k$，即它可以保证其费用不超过相应的最优费用的 $2-1/k$ 倍[1]。EI-Yaniv 等人通过策略随机化进一步改善了此问题的竞争比[3]。在传统的占线雪橇租赁问题上，又进行了很多扩展研究：Fujiwara 和 Iwama 研究了输入具有指数分布 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ 的平均情形[4]；Azar 在 Karp 模型的基础上建立了资本投资模型[5]。还有许多更为复杂的扩展模型如 EI-Yaniv 和 Karp 的替换模型[6]，Fleischer 的优惠卡模型[7]。

在传统的竞争分析中，占线决策者是在对未来的输入没有任何信息的条件下给出应对策略并分析其竞争性能。Binali 则提出了风险补偿概念，把占线决策者的风险行为引入传统竞争分析中[8]。

利用不同策略下的竞争比作为风险的衡量尺度，即用风险策略 A 对传统最优竞争策略的机会成本来定义风险，即 r_A / r^*。这里设 t 为占线决策者的风险忍耐度（当 $t > 1$ 时，占线

基金项目:国家基金资助项目（70525004）; 博士点基金（20050698048）
徐寅峰(1962-)：男，吉林人，西安交通大学管理学院博士生导师，教授，研究方向：运筹优化与组合优化；
张兴国(1982-)：男，四川人，西安交通大学管理学院硕士研究生，研究方向：占线策略及其在金融风险管理中的应用。

决策者是风险偏好的；当$t=1$时，占线决策者是风险中立的），则风险策略A的集合可以表示为$\mathrm{I}_t=\left\{\mathrm{A}\middle|\mathrm{r}_A\le t\cdot r^*\right\}$。这时，占线决策者就可以根据自己的风险忍耐度来设计策略并容忍该策略下竞争比的扩大。令$F\in\delta$为预期输入序列，如果占线决策者能够对未来成功的预期，便可以得到约束竞争比$\hat{\mathrm{r}}_{\mathrm{A}}=\sup\limits_{F\in\delta}\ \{\mathrm{Cost}_A(F)/\mathrm{Cost}_{OPT}(F)\}$，该问题的最优约束竞争比为$\hat{r}^*=\inf\limits_A(\hat{\mathrm{r}}_{\mathrm{A}})$。我们用竞争比性能的提高来衡量风险策略$A$所获得的补偿，即风险策略$A$的补偿函数为$R_A=r^*/\hat{r}_A$。对于问题$P$，如果占线决策者能够成功预期未来的需求序列，则总能够在风险策略A的集合中选择一个最优风险策略为$A^*\in I_t$，得到最优补偿函数为$R_{A^*}=\sup\limits_{A\in I_t}\{r^*/\hat{r}_A\}$。

本文的工作包括两个部分。首先，对经典的占线雪橇租赁问题进行租赁选择的扩展，增加了租赁者可以周期性租赁并且租金具有折扣的选择，在这种情况下设计占线策略，并证明其具有最优竞争比。在此基础上建立了占线租赁者的风险补偿模型，针对占线租赁者的风险容忍度和不同的预期，分别设计占线策略并分析其竞争性能。

2 具有周期性折扣的占线租赁问题

2.1 具有周期性折扣的占线租赁模型

现实中，有一些书店为了方便读者，会给读者提供三种选择：1）按天租赁，每天的成本为c；2）购买，成本P；3）以T天为周期进行租赁，租金有一个折扣 d,设$Tcd=(T-X)c$。下面以滑雪撬租赁为例建立模型。

一个滑雪初学者在购买滑雪撬之前，每天滑学前将面临如下 3 种选择：

（1)：按天租赁，每天的租赁成本为c；

（2)：购买，成本为P；

（3)：以T天为周期租，一个周期的折扣租赁成本为$(T-X)c$，不失一般性假设$1\le X\le T-1$ 和 $X\in Z$。周期租赁的租金在一个周期的首日交付并且不可撤销取回。

模型的目标：如何设计竞争策略，使总成本尽量小。简单界定（3）中$\left(T-X\right)$的变化范围：$1\le T\text{-}X\le k$。否则，若$T\text{-}X>k$，则租赁一个周期的成本大于购买的成本，选择（2）明显优于选择（3)，使得选择（3）失去意义。

由于问题的结果与折扣的天数 X 的范围有关，因此以$1\le X\le\left\lfloor\frac{T}{2}\right\rfloor$且$X\in Z$和$\left\lfloor\frac{T}{2}\right\rfloor+1\le X\le T-1$且$X\in Z$分别讨论。

2．2 竞争策略设计与分析

首先分析离线成本，令H为离线租赁H天的成本等于购买价格。即$\left\lfloor\frac{H}{T}\right\rfloor(T-X)c+\min\left\{\left(T-X\right)c,\left(H\bmod T\right)c\right\}=P$。因为具有周期性租赁的选择，所以对应成本$P$的$H$可能有多个值，如果有，就取其中的最小值。设实际使用 h 天，则不同使用的天数变化范围与其对应的离线成本分别为：

(1) $1 \le h \le T-X$： hc；

(2) $T-X+1 \le h \le H-1$： $\left\lfloor \frac{h}{T} \right\rfloor (T-X)c + \min\left\{(T-X)c, (h \bmod T)c\right\}$；

(3) $h \ge H$： P。

基于上述分析，租赁过程中有 2 个临界点，一个是按天租与周期性租的临界点：$T-X$；另一个是租与买的临界点：H。

策略 A：1）从第一天到第$T-X-1$天，按天租赁；

2）从第 T-X 天开始，以 T 天为周期，周期性的租赁；假设租赁了$i(i \ge 0)$个周期后，满足 $0 \le [H-1-(T-X-1)-iT] < T$。若$(T-X) \le [H-1-(T-X-1)-iT] < T$，则再租赁一个周期；若$0 \le [H-1-(T-X-1)-iT] < T-X$，则一天一天的租赁，直到第 H-1 天；

3）在第 H 天购买。

定理 1：当$T-X=c$或$2c$时，竞争比下界为$2-\frac{1}{k}$和 2，最优占线策略是从第一天开始就周期性租赁，租赁（k-1）个和（$\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil -1$）个周期后选择购买。

当$T-X=c$时，问题退化成经典的滑雪橇租赁问题，最优占线策略是从第一天开始就周期性租赁，租赁（k-1）个周期后购买；当$T-X=2c$时，最优占线策略是从第一天开始就周期性租赁，租赁（$\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil -1$）个周期后购买，竞争比为 2，最坏情况是实际只使用 1 天。

定理 2：当 $T-X \ge 3c$ 且 $X \le \left\lfloor \frac{T}{2} \right\rfloor$ 且 $X \in Z^+$ 时，策略 A 的竞争比为$2+\frac{X-1}{k}$且策略 A 为最优确定性竞争策略。

证明：当需求的输入一个一个到来的时候，最坏情形只可能在两个时间点取得，一个是T-X点，还有一个是H点。

令$R=\frac{\text{占线的成本}}{\text{离线的成本}}$。

在 T-X点，$R=\frac{T-X-1+T-X}{T-X}=2-\frac{1}{T-X}$。

对H点，分四种情况讨论：设$d=H-1-(T-X-1+iT)$。

(1) $0 \le d \le 1$时，购买时$R=\frac{P-c+P}{P}=2-\frac{1}{k}$；

(2) $2 \le d \le X+1$时，购买时$R=\frac{P-2c+dc+P}{P}=2+\frac{d-2}{k}$，是 d 的增函数当$d=X+1$时，$R_{\max}=2+\frac{X-1}{k}$；

(3) $X+2 \le d \le T-X$时，购买时$R=2+\frac{X-1}{k}$；

（4） $T-X+1 \le d \le T-1$时，购买时$R=2+\frac{T-d-1}{k}$。

综上所述，此策略的竞争比为$2+\frac{X-1}{k}$。

可以看出，最坏序列就是$X+1 \le d \le T-X$的序列，在H-1 天结束时，占线决策者至少

比离线决策者的成本$\left(P-c\right)$多用Xc，除非占线决策者从第一天开始就周期性租赁，但是这时如果序列马上停止，会使比值达到（$T-X$）, 比文中的竞争比更大。

定理 3：在 $T-X\geq 3c$ 且 $X>\left\lfloor \frac{T}{2} \right\rfloor$ 且 $X\in Z^{+}$ 时，竞争比下界为 $\frac{P-c+\left(T-X-1\right)c+P}{P}=2+\frac{T\text{-}X-2}{k}$，且策略 A 也为最优确定性策略。

证明同定理 2 相似。

3 带有预期的占线周期性折扣租赁问题

3.1 带有预期的占线周期性折扣租赁模型

基于上一节的周期性折扣租赁问题，这一节将讨论增加预期后，策略的设计以及竞争比的改变情况。这里, 对预期进行分类的临界点分别是离线成本计算时单租与周期性租的临界点，租与买的临界点。

滑雪初学者在每天滑雪之前，他将面临与第 2 节一样的 3 种选择：

模型的目标：如何设计竞争策略，在 3 种预期下：$(1), h\leq T-X-1;$ $(2), T-X\leq h\leq H-1;$ $(3), H\leq h$，使总租赁成本尽量小。

假设：$T-X\geq 3c$ 且 $X\leq\left\lfloor \frac{T}{2} \right\rfloor$ 且 $X\in Z^{+}$；占线决策者的风险容忍度为 t。

3.2 竞争策略设计与分析

预期 f1，$h\leq T-X-1$。

策略 B：与策略 A 一样。预期成功的竞争比为$C_1=1$。

预期 f2，$T-X\leq h\leq H-1$。

策略 C：1）从第一天到第 S-1 天，按天租赁；

2）从第 S 天开始周期性租赁，假设租赁了$i\left(i\geq 0\text{且}i\in Z\right)$个周期后，满足$0\leq H-1-(S-1)-iT<T$，若$\left(T-X\right)\leq\left[H-1-(T-X-1)-iT\right]<T$，则再租赁一个周期;若$0\leq\left[H-1-(T-X-1)-iT\right]<T-X$，则一天一天的租赁，直到第 H-1 天；

3）在第 H 天时购买。

首先，我们求出 S 的表达式。由风险容忍度的定义$I_t=\left\{A\middle|r_A\leq tr^{*}\right\}$：

$$\frac{S'-1+T-X}{S'}\leq(2+\frac{(X-1)}{k})t\ \Rightarrow\ S'\geq\frac{T-X-1}{(2+\frac{(X-1)}{k})t-1}\ \Rightarrow\ S=\left\lceil \frac{T-X-1}{(2+\frac{(X-1)}{k})t-1} \right\rceil$$

此预期成功下的竞争比分析：分析一个周期的情形，以第一个周期为例, 第一周期图如下所示：

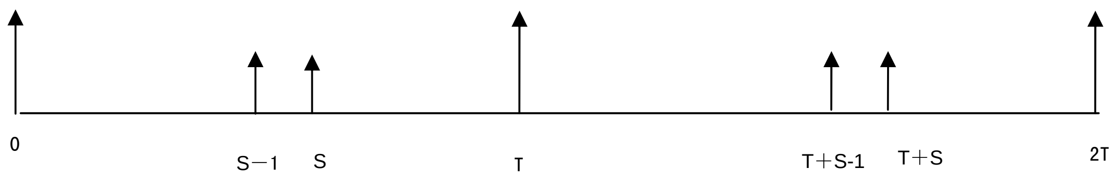

图 1. 第一个周期租赁的时间点示意图

在周期$\left[T,2T\right)$内，最坏的情况在两个点中的其中一点取得：一个是 T 点，另一个是 T+S

在 T 点：$r_{11}=\dfrac{S-1+T-X}{T-X}=1+\dfrac{S-1}{T-X}$；

在 T+S 点：$r_{12}=\dfrac{S-1+2(T-X)}{T-X+S}=1+\dfrac{T-X-1}{T-X+S}$。

所以，在区间$[T,2T)$内，最大比值为$\max\{r_{11},r_{12}\}$。依次类推，在区间$[nT,(n+1)T)$中，

在nT 点：$r_{n1}=\dfrac{S-1+n(T-X)}{n(T-X)}=1+\dfrac{S-1}{n(T-X)}$；

在$nT+S$ 点：$r_{n2}=\dfrac{S-1+(n+1)(T-X)}{n(T-X)+S}=1+\dfrac{T-X-1}{n(T-X)+S}$。

所以，在区间$[nT,(n+1)T)$，最大比值为$\max\{r_{n1},r_{n2}\}$。

下面考察最后一个区间。设$\left\lfloor\dfrac{H-1}{T}\right\rfloor=m$，在区间$[mT,H)$内分两种情况：

（1）$\left((H-1)\bmod T\right)\le S-1$，最大比值为$r_{m1}$；

（2）$\left((H-1)\bmod T\right)>S-1$，最大比值为$\max\{r_{m1},r_{m2}\}$。

可以看出，预期成功下的比值是时间的减函数，极限为 1，因此竞争比$C_2=\max\{r_{11},r_{12}\}$。

预期 f3，$H\le h$。

策略 D：从第一天到 T-X-1 天，按天租赁。从第 T-X 天开始，周期性的租赁，假设租赁了 n 个周期，又租赁了 e 天，$(1\le e<(T-X)\text{且}e\in Z)$，然后购买。则：分两种情况：

$$(1):T-X+e>T;\quad \frac{(T-X)c+n(T-X)c+(e-1)c+P}{(n+1)(T-X)c+\left(\left(T-X+e\right)\bmod T\right)c}\le\left(2+\frac{X-1}{k}\right)t\text{。}$$

设：$\dfrac{(T-X)c+n(T-X)c+(e-1)c+P}{(n+1)(T-X)c+\left(\left(T-X+e\right)\bmod T\right)c}=(2+\dfrac{X-1}{k})t'$（$t'\le t$ 且是能取到的最大的数）。

$$(2):T-X+e\le T;\quad \frac{(T-X)c+n(T-X)c+(e-1)c+P}{(n+1)(T-X)c}\le(2+\frac{X-1}{k})t\text{。}$$

设：$\dfrac{(T-X)c+n(T-X)c+(e-1)c+P}{(n+1)(T-X)c}=(2+\dfrac{X-1}{k})t'$（$t'\le t$ 且是能取到的最大的数）。

预期成功下策略的竞争比分析：

$$R=\frac{(T-X)c+n(T-X)c+(e-1)c+P}{P}=1+\frac{(n+1)(T-X)+(e-1)}{k}\text{。}$$

$$(1),T-X+e>T:R=\frac{(2k+X-1)\left[(n+1)(T-X)+\left(\left(T-X+e\right)\bmod T\right)\right]}{k^2}t'\text{；}$$

$$(2),T-X+e\le T:\quad R=\frac{(2k+X-1)(n+1)\left(T-X\right)}{k^2}t'\text{。}$$

竞争比为 $C_3 = \frac{(2k+X-1)\left[(n+1)(T-X)+\left((T-X+e)\bmod T\right)\right]}{k^2} t^{'}$。

根据上述分析，带预期的占线周期性折扣租赁在风险 t 下的回报如表 1 所示：

表 1：带预期的占线周期性折扣租赁在风险 t 下的回报

预期	策略	预期成功的竞争比	风险策略的补偿
预期 f1：$h \le T-X-1$	策略 B	1	$2+\frac{X-1}{k}$
预期 f2：$T-X \le h \le H-1$	策略 C	$\max\{r_{11}, r_{12}\}$	$\left(2+\frac{X-1}{k}\right)/\max\{r_{11}, r_{12}\}$
预期 f3：$H \le h$	策略 D	C_3	$\left(2+\frac{X-1}{k}\right)/C_3$

4 小结

本文在“雪橇租赁”模型基础上，给予需求者多一项租赁选择，即：周期性打折租赁。设计了竞争策略，求出了策略的竞争比并证明了下界，在此基础上，建立了带预期的风险补偿模型。可以看出，与 Karp 的雪橇租赁模型相比，占线决策者多一项选择，竞争比的下界反而增大，这说明不是选择越多，竞争比下界越小。下一步可以在此基础上继续进行扩展，如在时间维度的基础上，增加一个数量的维度。

参考文献：

1. Karp R. Online algorithms versus off-line algorithms: How much is it worth to know the future? [C]. Proc. IFIP 12th World Computer Congress, 1992, 416 - 429.
2. Sleator D D, Tarjan R. Amortized efficiency of list update and paging rules[J]. Comm. ACM. 1985,28(2):202-208.
3. El-Yaniv R, Kaniel R, Linial N. Competitive optimal on-line leasing[J]. Algorithmica, 1999,25: 116- 140.
4. Fujiwara H, Iwama K. Average-case competitive analyses for ski-rental problems[C] . ISAAC'02, 2002: 476-488.
5. Azar Y, Bartal Y, Feuerstein E, Fiat A, Leonardi S, Rosen A.. On capital investment[J]. Algorithmica,1999,25:22-36
6. El-Yaniv R, Karp R. Nearly optimal competitive online replacement policies[J]. Mathematics of Operations Research, 1997 ,22 (4): 814-839.
7. Fleischer R.. On the Bahncard problem[J], Theoretical Computer Science, 2001, 268(1): 161-174.
8. Al-Binali S. A risk-reward framework for the competitive analysis of financial games [J]. Algorithmica,1999,25:99-115.
9. Kazuo Iwama, Kouki Yonezawa. Using generalized forecasts for online currency conversion[C]. Lecture Notes in Computer Science,1999,1627:409-421
10. Lili Ding, Chunlin Xin, Jian Chen. A Risk-Reward Competitive Analysis of the Bahncard Problem [C]. The International Conference on Algorithmic Applications In Management,

LNCS 3521, 2005: 37-45

The Ski Problem with a periodical leasing discount and forecast

XU Yin-feng, ZHANG Xing-guo, DONG Yu-cheng, ZHENG Fei-feng

(School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049,China)

Abstract: In the classical Ski Problem, the player only has two choices: lease day by day or buy. In this paper, we consider the case with a third choice, i.e., lease periodically with a leasing cost discount. We present the best deterministic strategy for the on-line player. Furthermore, leasing risk and forecast are introduced into our model, and different strategies are designed according to the on-line player's risk tolerance and forecast.

Keywords: Online Algorithm; Competitive Ratio; Risk; the Ski Problem