系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
20(3) (2000, 7), 264–269

已知拓扑下的最短网络

叶 继 昌

(淄博学院计算机系， 山东淄博 255012)

徐 寅 峰 徐 成 贤

(西安交通大学理学院， 西安 710049)

摘要 在平面上给定一个有 n 个固定点的集合 S 和一个含有 m 个可动点的集合 M 及连接这些点的边的集合 T(T 也称之为拓扑), 确定 M 中点的位置, 使点集 $V=S\cup M$ 的互联网络最短. 本文证明了 n 是偶数 $m=\frac{n}{2}-1$ 及在满 4 度 Steiner 拓扑下最短网络的结构是 4 度 Steiner 树.

关键词 网络, Steiner 问题, 拓扑.

1 引 言

设 S 是平面上 n 个点的集合, 在允许加辅助点 (也称 Steiner 点) 的条件下, 确定 S 中 n 个点的边长之和最短互联网络, 此问题称之为 Steiner 问题. 由于最短网络一定是树, 所以也称之为 Steiner 最小树问题 [1,2]. 推广这个问题, 设 S 是平面上 n 个固定点的集合, M 是平面上 m 个可动点的集合, 确定 M 中 m 个点的位置, 使 $S\cup M$ 中的 $n+m$ 个点的互联网络最短, 称这个问题为 m-Steiner 问题. S 中的点称为正常点, 而 M 中的点称为 Steiner 点 (注: 这个最短互联网络中不含有 $S\cup M$ 以外的任何点, 即使再加入其它辅助点可使这个网络最短. 再有就是允许这个网络中有零长度的边).

本文考虑了 n 是偶数, $m=\frac{n}{2}-1$ 这种特殊情形在给定的满 4 度 Steiner 拓扑下确定最短互联网络的结构.

2 基本概念和术语

为后面叙述方便, 我们给出如下一些概念和术语.

定义 1 每个点的度都不超过 4 的树的拓扑称为 4 度 Steiner 拓扑, 如果 4 度 Steiner 拓扑中正则点的度为 1, Steiner 点的度为 4, 则称这个拓扑为满 4 度 Steiner 拓扑.

定义 2 如果树的拓扑是 4 度 Steiner 拓扑, 且树中的每个点处的任何两个相邻角的度数之和不小于 π, 则称这个树为 4 度 Steiner 树.

在 4 度 Steiner 树中, Steiner 点的度只能是 3 或 4, 如果 Steiner 点的度为 1 或 2, 则容易验证将这个点与相邻点之边收缩使其重合. 这样得到的新树的长度不大于原树的长度.

收稿日期: 1997-07-07.

定义 3 如果 4 度 Steiner 树的拓扑是满 4 度 Steiner 拓扑，则称这个 4 度 Steiner 树为满 4 度 Steiner 树.

结论 如果满 4 度 Steiner 拓扑有 $2n$ 个正则点，则它有 $n-1$ 个 Steiner 点.

证　设在满 4 度 Steiner 拓扑下有 k 个 Steiner 点，则有 $2n+k-1$ 条边. 由 Steiner 点的度是 4, 正则点的度是 1, 则总的边数应是 $\frac{4k+2n}{2}$ (除 2 是由于每个边与两个点连接). 因而 $\frac{4k+2n}{2}=2n+k-l$, 故 $k=n-1$.

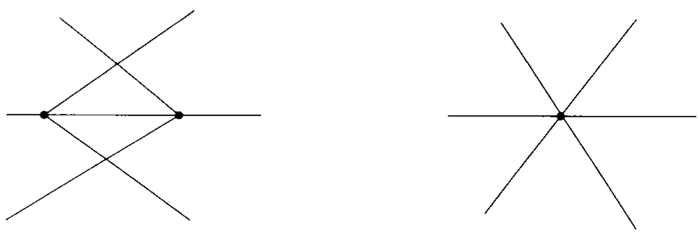
为了叙述方便，我们用 AB 表示连接 A 和 B 两点的边， $|AB|$ 表示 AB 边的长度.

3　主要结果

设固定点集 S 有 $2n(n>1)$ 个点，可动点集 M 有 $n-1$ 个点. 记 T_n 是点集 $V=S\cup M$ 上的一个互联网络的拓扑. 从 T_n 得到的拓扑 T_n' 称为拓扑 T_n 的退化拓扑，如果通过收缩 T_n 的一条边而得到 T_n' 或者说删去 T_n 的一个边并将这条边的两个端点重合. 用 $D(T_n)$ 表示包含 T_n 在内的所有 T_n 的退化拓扑的集合，用 $D^*(T_n)$ 表示 $D(T_n)$ 中所有 4 度 Steiner 拓扑的集合. 则我们有如下结论.

定理 1 设 T_n 是满 4 度 Steiner 拓扑，如果 $D^*(T_n)$ 中存在一个 4 度 Steiner 树，则它必是关于 T_n 的最短拓扑网络.

注　关于 T_n 的最短拓扑网络是一定存在的，而在 $D^*(T_n)$ 中 4 度 Steiner 树未必一定存在，如图 1 所示.



拓扑 T_3　　　　关于 T_3 最短拓扑网络

图 1　最短拓扑网络不是 4 度 Steiner 树

定理 2 如果 T_n 是满 4 度 Steiner 拓扑，则 $D^*(T_n)$ 中至少存在一个 4 度 Steiner 树.

4　定理的证明

先考虑这样一个问题：对于平面上给定的 4 个点的集合 W, 确定平面上一点使其到 W 中 4 个点的距离之和最小，称这个点为 W 的最小点.

引理 如果 W 的凸包是四边形，则四边形两对角线的交点即为最小点，如果 W 的凸包是三角形，则最小点就是 W 中不在三角形三个顶点上的那个点，如果 W 的凸包是一线段，则 W 中不在线段的两个端点上的那两个点及那两点之间的所有点都是最小点.

证　设 $W=\{A,B,C,D\}$, 那么 W 的最小点一定落在 S 的凸包内或其边界上.

如果 W 的凸包是四边形如图 2 (a). 在四边形内任取一点 E, 根据三角不等式有 $|EA|+|EB|+|EC|+|ED|\geq|AC|+|BD|$, 等式成立当且仅当 E 与 AC 和 BD 的交点重合.

如果 W 的凸包是三角形，在三角形内任取一点 E, 如图 2(b). 不妨设 E 点落在三角形 BCD 内或其边界上，则有 $|EA|+|EB|\geq|DA|+|DB|$ 和 $|EC|+|ED|\geq|DC|$. 两等式成立的充要条件是 E 与 D 重合. 因而有 $|EA|+|EB|+|EC|+|ED|\geq|DA|+|DB|+|DC|$.

如果 W 的凸包是一线段如图 2(c). 结论成立是显然的. 证毕.

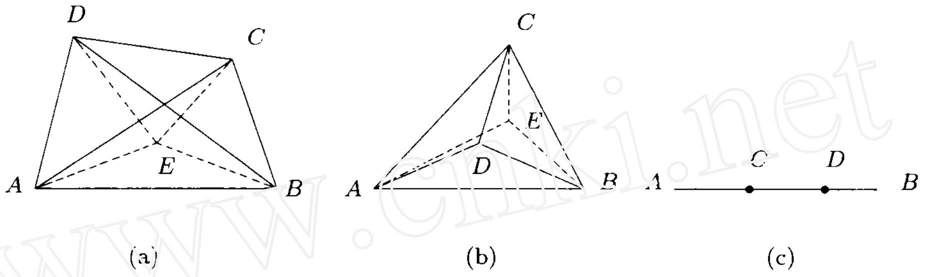


图 2

引理说明了具有满 4 度 Steiner 拓扑的 4 度 Steiner 树中 Steiner 点具有局部极小的性质.

定理 1 的证明 对于 $n=2$, 根据引理即知定理 1 成立是显然的. 下面对 n 用归纳法证明.

设 t_1 是一个在 $D^*(T_n)$ 中的 4 度 Steiner 树. 假设在 $D(T_n)$ 中存在一个比 t_1 还短的树 t_2, 即 $l(t_2)<l(t_1)$ ($l(t)$ 表示树 t 的长度). 设 v_1,v_2,v_3 是 T_n 中连接同一个 Steiner 点 p 的 3 个正则点. 设 p' 是连接 p 的另一个 Steiner 点，用 p_1 和 p_1'(p_2 和 p_2') 表示 p 和 p' 在树 $t_1(t_2)$ 中的位置.

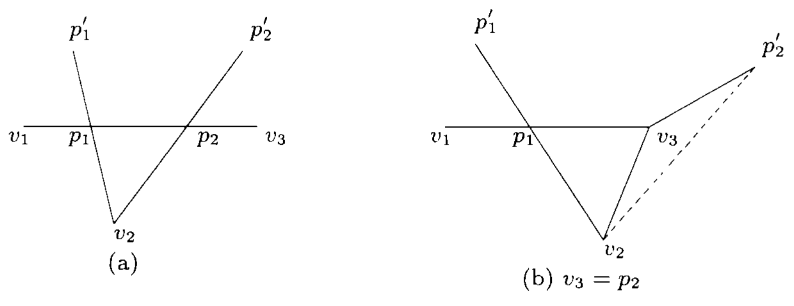


图 3

首先考虑 p_1 不与 $v_i(i=1,2,3)$ 重合. 用 t_1^* 表示树 t_1 中去掉与点 p_1 相联的所有边和点 v_1,v_3,p_1 并加入边 $p_1'v_2$ 而得到的树，显然树 t_1^* 是 4 度 Steiner 树. 如果 p_2 也不与 $v_i(i=1,2,3)$ 重合，如图 3(a), 用 t_2^* 表示在树 t_2 中去掉与点 p_2 相联的所有边和点 v_1,v_3,p_2 并加入边 $p_2'v_2$ 而得到的树. 如果 p_2 与某 v_i 重合，不妨设 p_2 与 v_3 重合，如图 3(b). 用 t_2^* 表示在树 t_2 中

边 v_3v_1, v_3v_2, v_3p_2', 点 v_1, v_3 后加入边 $p_2'v_2$ 而得到的树. 记 $T_i^*(i=1,2)$ 表示树 t_i^* 的拓扑, $V^*=V-\{v_1,v_3,p\}$, T_{n-1} 为 T_n 中用边 $p'v_2$ 代替边 pv_1, pv_2, pv_3, pp' 而得到的对应于点集 V^* 的满 4 度 Steiner 拓扑, 则显然有

$$T_1^*\in D^*(T_{n-1}),\quad T_2^*\in D(T_{n-1}).$$

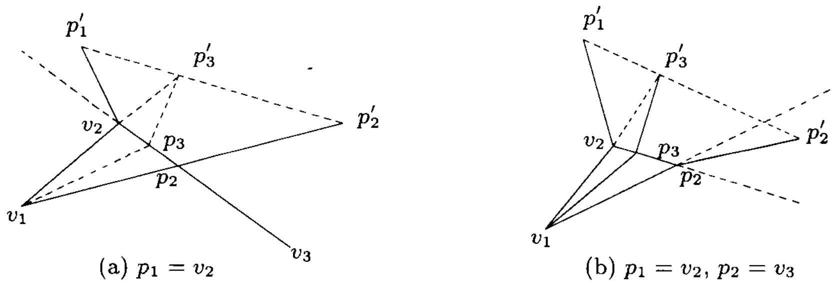
由于树 t_1^* 是 4 度 Steiner 树, 由归纳法假设有 $l(t_1^*)\le l(t_2^*)$, 而

$$l(t_1)=l(t_1^*)+|v_1v_3|,$$

$$l(t_2)=l(t_2^*)+\begin{cases}|v_1v_3|, & p_2 \text{ 与 } v_i(i=1,2,3) \text{ 不重合}\\ |v_1v_3|+|v_2v_3|+|p_2'v_3|-|p_2'v_2|, & p_2 \text{ 与 } v_3 \text{ 重合.}\end{cases}$$

由 $|v_3v_2|+|v_3p_2|\ge|p_2'v_2|$, 有 $l(t_2)\ge l(t_2^*)+|v_1v_3|\ge l(t_1^*)+|v_1v_3|=l(t_1)$, 与 $l(t_2)<l(t_1)$ 矛盾.

再考虑 p_1 与某 $v_i(i=1,2,3)$ 重合, 不妨设 p_1 与 v_2 重合. 根据引理知点 p_1' 落在线段 v_1v_2, v_3v_2 的延长线的角形域内. 如果 p_2 也与 v_2 重合, 则由归纳法假设可直接得出结论. 因而不妨设 p_2



(a) $p_1=v_2$　　(b) $p_1=v_2,\ p_2=v_3$

图 4

要么落在边 v_2v_3 内, 如图 4 (a), 要么与 v_3 重合, 此时点 p_2' 落在线段 v_1v_3 和 v_2v_3 的延长线的角形域内, 如图 4(b). 连接 p_1' 和 p_2' 并延长 v_1v_2 使其与 $p_1'p_2'$ 相交, 交点即为 p_3'. 令 $\alpha=\frac{|p_1'p_3'|}{|p_1'p_2'|}$, 在边 p_1p_2 上取一点 p_3 使 $|p_1p_3|=\alpha|p_1p_2|$. 用 $V_1=\{s_i|i=1,2,\cdots,3n-1\}$ 表示树 t_1 对应于拓扑 T_n 的所有结点集合. 若对某 i,j 有 $s_i=s_j$, 则说明 Steiner 点 s_i 与固定点 s_j 重合. 由于 t_1 是 4 度 Steinter 树, 不可能有两个 Steiner 点重合. $V_2=\{s_i'|i=1,2,\cdots,3n-1\}$ 表示树 t_2 在拓扑 T_n 下与树 t_1 的结点对应的结点集合. 记 $V_3=\{\alpha s_i+(1-\alpha)s_i'|i=1,2,\cdots,3n-1\}$, 并设 t_3 是在拓扑 T_n 下以 V_3 为结点集的树, 由树长是结点的凹函数 [3], 得 $l(t_2)<l(t_3)<l(t_1)$. 设 t_3' 表示在树 t_3 中用 v_2p_3', v_2v_1 和 v_2v_3 替换联接 p_3 的四条边而得到的树. 显然 $l(t_3')\le l(t_3)$. 记 t_3^* 为在树 t_3' 中去掉边 v_2v_3 和 v_2v_1 而得到的树, T_3^* 表示 t_3^* 的拓扑, 点集 V^* 树 t_1^* 拓扑 T_1^* 和 T_{n-1} 的意义同上, 则有 $T_1^*\in D^*(T_{n-1}), T_3^*\in D(T_{n-1})$. 由归纳法假设有 $l(t_1^*)\le l(t_3^*)$, 而 $l(t_1)=l(t_1^*)+|v_2v_1|+|v_2v_3|, l(t_3)=l(t_3^*)+|v_2v_1|+|v_2v_3|$. 因此可得 $l(t_3)\ge l(t_3')\ge l(t_1)$, 与 $l(t_3)<l(t_1)$ 矛盾. 证毕.

定理 2 的证明 对 $n=2$ 定理 2 成立是显然的. 下面对 n 用归纳证明.

假设在 $D^*(T_n)$ 中存在在 2 个 4 度 Steiner 树 t_1 和 t_2, 由定理 1 知 $l(t_1)=l(t_2)$. 设 v_1,v_2,v_3 是 T_n 中连接同一个 Steiner 点 p 的三个正则点. p' 是连接 p 的另一个 Steiner 点. 用 p_i 和 p'_i 表示 p 和 p' 在树 $t_i(i=1,2)$ 中的位置.

如果 p_1 和 p_2 重合, 如图 5. 记 $t_i^*(i=1,2)$ 为通过在树 t_i 中去掉边 p_iv_1,p_iv_3 和点 v_1,v_3 而得到的树. T_i^* 为树 t_i^* 的拓扑. T_{n-1} 为 T_n 中用 $p'v_2$ 代替与 p 相连的四条边而得到的满 4 度 Steiner 拓扑. 显然我们有 $T_i^*\in D(T_{n-1})$ 且 t_i^* 是 4 度 Steiner 树. 由归纳假设, $t_1^*=t_2^*$. 因而我们有 p'_1 也与 p'_2 重合, 由此我们有 $t_1=t_2$.

记 $V_1=\{s_i|i=1,2,\cdots,3n-1\}$ 和 $V_2=\{s'_i|i=1,2,\cdots,3n-1\}$ 分别表示树 t_1 和 t_2 对应于拓扑 T_n 的所有结点集合且 s_i 和 $s'_i(i=1,2,\cdots,3n-1)$ 对应于拓扑 T_n 中的同一个结点.

如果 p_1 与 p_2 不重合, 若 p_1 和 p_2 都不与点 $v_i(i=1,2,3)$ 重合. 不妨设 p_1 和 p_2 都落在线段 v_1v_3 上如图 3(a). 用 $t_i^*(i=1,2)$ 表示树 t_i 中去掉与点 p_i 相联的边和点 v_1,v_3,p_1 并加入边 p'_iv_2 而得到的树, T_i^* 表示树 t_i^* 的拓扑. 显然树 t_i^* 是 4 度 Steiner 树且 $T_i^*\in D^*(T_{n-1}),T_{n-1}$ 为 T_n 中用边 $p'v_2$ 代替与点 p 相联的边而得到的满 4 度 Steiner 拓扑. 由归纳假设有 $t_1^*=t_2^*$, 这说明 p'_1 和 p'_2 重合, 因此可推出 p_1 和 p_2 也重合, 矛盾. 若 p_1 和 p_2 有一个与某点 $v_i(i=1,2,3)$ 重合, 不妨设 p_1 与 v_2 重合, p_2 落在线段 v_1v_3 上, 如图 4(a). 或者 p_1 和 p_2 都分别与某点 v_1 和 $v_j(i,j=1,2,3,i\neq j)$ 重合, 不妨设 p_1 与 v_2 重合, p_2 与 v_3 重合, 如图 4(b). 设 $t_3(\alpha)$ 是点集 $V_3=\{\alpha s_i+(1-\alpha)s'_i|i=1,2,\cdots,3n-1,0<\alpha,1\}$ 在拓扑 T_n 下的树. 由 $l(t_1)=l(t_2)$ 知 $l(t_3(\alpha))=l(t_1)=l(t_2)$. 因此 $t_3(\alpha)$ 也是最短网络. 记 $p_3=\alpha p_1+(1-\alpha)p_2$, $p'_3=\alpha p'_1+(1-\alpha)p'_2$. 若存在某个 $0<\alpha<1$ 使线段 p'_3p_3 和 p_3v_1 不共线, 则显然可以缩短树 $t_3(\alpha)$, 此与 $t_3(\alpha)$ 是最短网络矛盾. 若对任何 $0<\alpha<1$ 都有线段 p'_3p_3 和 p_3v_1 共线, 则显然有线段 p'_1p_1 和 p_1v_1 共线, 线段 p'_2p_2 和 p_2v_1 共线且线段 $p'_1p'_2$ 和 p_1p_2 平行. 用 $t_1^*(i=1,2)$ 表示树 t_i 中去掉与点 p_i 相联的边和点 v_1,v_3,p_i 并加入边 p'_1v_2 而得到的树, T_i^* 表示树 t_i^* 的拓扑, 显然树 t_i^* 是 4 度 Steiner 树且 $T_i^*\in D^*(T_{n-1}),T_{n-1}$ 为 T_n 中用边 $p'v_2$ 代替边 pv_1,pv_2,pv_3,pp' 而得到的满 4 度 Steiner 拓扑. 由归纳假设有 $t_1^*=t_2^*$, 这说明 p'_1 和 p'_2 重合, 因此可以推出 p_1 和 p_2 也重合, 矛盾. 证毕.

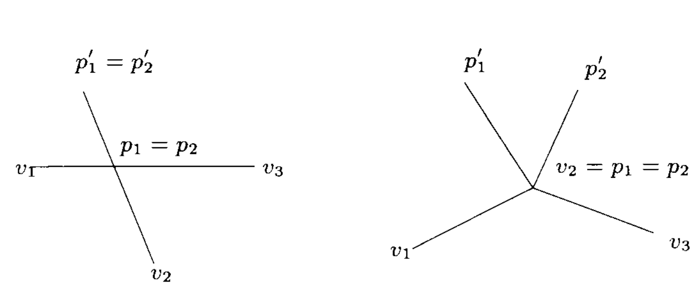


图 5

5 注记

本文第三节给出了有 $2n$ 个固定点集 S 和 $n-1$ 个可动点集 M 在满 4 度 Steiner 拓扑下

最短网络的结构．在拓扑不给定的条件下点集 $V = S \cup M$ 的最短互联网络的结构如何，我们猜测最短网络也应是 4 度 Steiner 树．

参 考 文 献

[1] Courant R and Robbins H. What is Mathemetics?, Oxford univ. pree. 1941.

[2] Gillbert E N and Pollak H D. Steiner minimal tree. *SIAM J. Appl. Math.*, 1968, **16**(1): 1–29.

[3] Hwang F K and Weng J F. The shortest network under a given topology. *J. Alg.*, 1992, **13**(3): 468–488.

THE SHORTEST NETWORK UNDER A GIVEN TOPOLOGY

Ye Jichang

(*Zibo University, Shandong Zibo* 255012)

Xu Yinfeng Xu Chengxian

(*Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)

Abstract Given a set S of n fixed points, a set M of m moving points in the plane and a set T of edges connecting these points (T is also called a topology), locate the positions of m points in M such that the total length of the network connecting the set $V = S \cup M$ is minimized. Under the condition that n is even, $m = \frac{n}{2} - 1$ and T is a full 4-degree Steiner topology it is proved that the shortest network is a 4-degree steiner tree.

Key words Networks, Steiner problem, topology.