第24卷第2期(总第146期) 系 统 工 程 Vol.24,No .2
2006年2月 Systems Engineering Feb.,2006

文章编号:1001-4098(2006)02-0037-04

不完全信息下交通网络最短路径关键边问题*

闫化海[1], 徐寅峰[1,2]

(1. 西安交通大学 管理学院 西安 陕西 710049;
2. 机械制造系统工程国家重点实验室, 西安 陕西 710049)

摘 要: 因各种突发事件(交通事故、自然灾害等)造成道路中断的现象普遍存在, 车辆在行驶的过程中并不具有道路中断的完全信息, 只有行进到中断处时才获得道路中断的信息。本文就不完全信息(道路中断信息)下的交通网络最短路径关键边问题进行研究, 首先定义了不完全信息下最短路径关键边的概念, 其次给出了求解不完全信息下最短路径关键边的有效算法及其时间复杂性分析, 然后结合城市道路网络给出了实际算例, 比较分析了最短路径关键边、最长绕行路关键边和不完全信息下的最短路径关键边问题, 指出了不完全信息下的最短路径关键边问题更具有实际意义。

关键词: 关键边; 不完全信息; 最短路径; 算法

中图分类号: C931; O221 **文献标识码**: A

1 引言

作为国民经济发展大动脉的交通网络, 承担着大量的旅客和货物运输任务, 对国民经济的发展起着至关重要的作用。然而在运输过程中, 经常由于各种突发事件(如交通事故、自然灾害等)导致道路中断的现象时有发生, 从而造成大量的经济损失。在实际情形下, 由于突发事件的不可预见性, 车辆在行驶的过程中无法得到行进线路上道路中断的完全信息, 因此研究不完全信息下的最短路径关键边问题, 对优化交通运输管理, 降低道路中断带来的经济损失, 提高运输效率具有非常重要的现实意义。

以往的相关文献主要包括最短路径关键边和最长绕行路关键边两方面。最短路径关键边问题首先由Corley 和Sha 提出, 即在给定一个至少2-Edges 连通的网络$G(V,E)$中, 则至少存在一条边e^*, 当从$G(V,E)$中删除e^*时, 使得起点s至终点t的最短路径长度增至最大, 则称边e^*为该最短路径的关键边[1]; 李引珍和郭耀煌给出了计算最短路径关键边的子树连通算法, 该算法的时间复杂性为$O(n^2)$[2]; Malik 等利用斐波纳契堆(Fibonacci Heaps)给出了时间复杂性为$O(m+n\log n)$的算法[3]; 此后E. Nardelli, G. Proietti 和P. Widmyer 又将算法的时间复杂性改进到$O(m\cdot\alpha(m,n))$, 其中α为阿克曼(Ackermann)函数的反函数[4]。

最长绕行路关键边问题是由E. Nardelli, G. Proietti和P. Widmyer 提出的, 即在一个至少2-Edges 连通的网络$G(V,E)$中, 对最短路径上的任意一条边为$e=(u,v)$, 其中u点更靠近起点, 当从G中删除边$e=(u,v)$时, 在u点进行绕路行进到达终点, 使得绕行路的路长满足$d_{G-e^*}(u^*,t)\geq d_{G-e}(u,t)$, 称边$e^*=(u^*,v^*)$为最长绕行路的关键边。E. Nardelli 等给出时间复杂性为$O(m+n\log n)$的算法[5]; 此后他们又将时间复杂性改进到$O(m\cdot\alpha(m,n))$[4]。

最短路径关键边问题是在基于完全的道路交通信息(道路中断)基础上做出决策的, 即在出发前就已获得道路中断的信息, 并没有考虑信息不完全时的情形; 最长绕行路的关键边问题研究仅仅针对绕行时所走的路长, 并没有从整体角度考虑道路中断前已经走过的路长。在实际情形下, 由于突发事件的不可预见性, 无法得到行进线路上道路中断的完全信息, 针对以上文献研究的不足, 本文提出了不完全信息下最短路径关键边问题, 从不完全(道路中断)信息的角度出发重新考虑最短路径的关键边问题, 本文研究不仅考虑绕行路的路长, 还要考虑已经走过的路长。由于利用斐波纳契堆和阿克曼函数的反函数给出的算法不易描述, 也难于在一般软件上实现[2], 本文从便于应用的角度出发, 给出了容易实现的子树连通的算法, 该算

* **收稿日期**: 2005-12-28
基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(70525004); 国家自然科学基金资助项目(70471035)
作者简介: 闫化海(1974-), 男, 山东人, 西安交通大学管理学院, 研究方向: 交通管理。

法的时间复杂性为$O(n^2)$。

本文的内容安排如下，第2部分为问题的描述和不完全信息下最短路径关键边的定义；第3部分给出了具体的算法及其时间复杂性分析；第4部分结合实际城市路网给出了算例，并对结果进行了比较分析；最后为结论部分，指出了进一步研究的方向。

2 问题描述及定义

2.1 问题描述

将现实中的道路交通网络抽象成以道路交叉口为节点，两节点间的道路为边的网络，边长为实际道路的里程数。为了讨论方便，将道路交通网络简称为交通网络，记为$G(V, E)$，其中$V=\{s, v_1, v_2, \cdots, v_{n-2}, t\}$为节点集，$s$表示起始点，$t$表示终止点，$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$为边的集合，其中$m$为边的个数，$n$为节点的个数。本文研究的假设条件为：

①车辆总是沿着最短路径行进；

②道路中断仅发生在s至t的最短路径上；

③在车辆行进过程中，只发生一条道路中断；

④车辆行进到中断路的节点（靠近起点s的节点）处时获得道路中断的信息（道路是否中断?）。

2.2 不完全信息下的最短路径关键边定义

以往关于最短路径关键边问题的研究是基于具有完全信息（道路中断信息）基础上的，在这里，我们考虑道路中断信息不完全的情形，定义具有不完全（道路中断）信息下最短路径关键边的概念。

定义 在一个至少2-Edges连通的网络$G(V, E)$中，设最短路径上的任意一条边为$e(u, v)$，其中u点更靠近起点，当从G中删除边$e=(u, v)$时，使得在u点进行绕路到达终点，使得总行程的路长$d_{G-e^*}(s, t) \geq d_{G-e}(s, t)$，则称边$e^*=(u^*, v^*)$为不完全信息下最短路径的关键边。其中$d_{G-e^*}(s, t)=d_G(s, u^*)+d_{G-e^*}(u^*, t)$，$d_{G-e}(s, t)=d_G(s, u)+d_{G-e}(u, t)$，$d_G(s, u)$为最短路径$P_G(s, t)$上起点$s$到$u$点的路长，$d_{G-e}(u, t)$为$G(V, E-e)$中从$u$点到终点$t$的绕行路路长。

在实际情形下，由于突发事件的不可预见性，无法得到行进线路上道路中断的完全信息，因此研究不完全信息下的最短路径关键边问题具有十分重要的现实意义。

3 不完全信息下的最短路径关键边的计算

计算不完全信息下的最短路径关键边问题的最初思路是，依次断开$P_G(s, t)$上的边，分别调用Bellman-Ford算法计算中断处到终点的最短路径长，再加上中断前已经走过的路长，并求两者之和的最大值，该最大值所对应的中断边即为不完全信息下最短路径的关键边。但是这种算法中存在大量的重复计算，算法的时间复杂性为$O(n^3)$，当网络中节点规模很大时，其计算量非常大。

通过分析，我们发现，发生中断时需要重新计算中断处至终点的最短路径，此时前面已经走过的路长一定在最短路径$P_G(s, t)$上，其路长可直接得到，根据子树连通的思想，只要能计算得到以中断处u和终点t的最短路径树，使其子树连通，就可以利用终点t至各点的最短距离进行计算，从而避免大量的重复计算，达到降低时间复杂性的目的。

首先计算得到以终点t为根的最短路径树$S_G(t)$，设$e(u, v)$是最短路径$P_G(s, t)$上的一条边，其中节点u更靠近起点s，令$M_t(u)$是在$S_G(t)$中从终点可直接到达该点而不通过边$e(u, v)$的点集，$N_t(u)=V-M_t(u)$为图中剩余点的集合，此时$N_t(u)$是$S_G(t)$的一个子树，也可以被认为是以u为根的最短路径子树[5]，如图1所示。

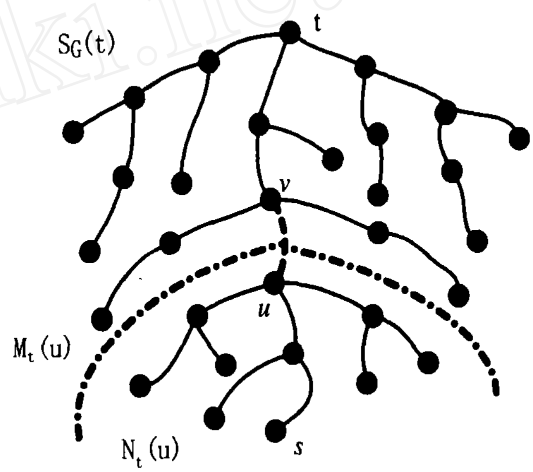

图1 以t为根的最短路示意图

通过上述分析我们可以得到以u为根的最短路径子树和以t为根的最短路径树，根据子树连通的思想，可得到下式

$$d_{G-e}(u, t) = \min_{x \in N_t(u), y \in M_t(u)} \{d_{G-e}(u, x) + w(x, y) + d_{G-e}(y, t)\}$$

实际上，因为$x \in N_t(u)$，所以

$$d_{G-e}(u, x) = d_G(u, x) = d_G(t, x) - d_G(t, u)$$

此外，如图2所示，因为$y \in M_t(u)$，所以

$$d_{G-e}(y, t) = d_G(y, t)$$

所以有

$$\begin{aligned} d_{G-e}(u, t) &= \min_{x \in N_t(u), y \in M_t(u)} \{d_{G-e}(u, x) + w(x, y) + d_{G-e}(y, t)\} \\ &= \min_{x \in N_t(u), y \in M_t(u)} \{d_G(t, x) - d_G(t, u) + w(x, y) + d_G(y, t)\} \end{aligned}$$

再加上道路中断前已经走过的路长，可得到

$$d_{G-e}(s, t) = d_G(s, u) + d_{G-e}(u, t)$$

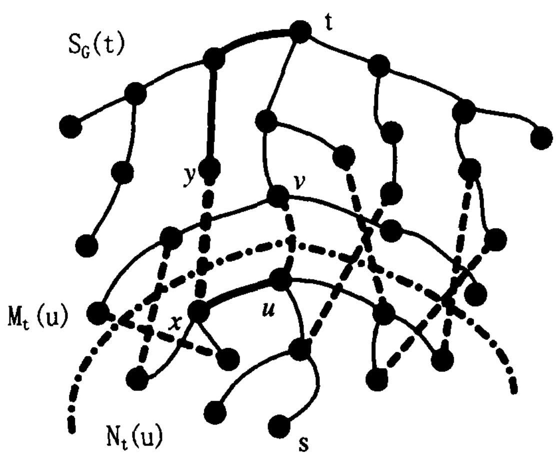

图2　边(u, v)删除后, 虚线表示连接边, 粗线表示u至t的最短路

3.1　算法

根据上述算法思想, 我们给出下面的具体算法:

step 1　利用Bellman -Ford 算法计算$G(V, E)$中t至所有其他顶点的最短路径, 此时便得到了$P_G(s, t)$和$S_G(t)$, 并记录$P_G(s, t)$上边的条数k;

step 2　令i=1;

step 3　从$P_G(s, t)$中删除边e_i, 生成$S_{G-e_i}(t)$, $M_t(u)$, $N_t(u)$;

step 4　计算 $d_{G-e_i}(s, t) = d_G(s, u) + \min\limits_{x\in N_t(u), y\in M_t(u)}\{d_G(t, x) - d_G(t, u) + w(x, y) + d_G(y, t)\}$;

step 5　$i = i+1$, 如果$i \le k$, 则回到步骤3, 否则到步骤6;

step 6　对$d_{G-e_i}(s, t)$求最大值, 最大值所对应中断边为不完全信息下的最短路径关键边。

3.2　算法复杂性分析

对顶点数为n, 边数为m 的交通网络$G(V, E)$而言, 上述算法的时间复杂性如下:

①步骤1 中调用Bellman -Ford 算法, 计算的复杂性为$O(mn)$;

②步骤3 的时间复杂性为$O(1)$;

③步骤4 为连接计算, 计算的时间复杂性为$O(m)$;

④算法中第2～ 5 步为循环计算, 循环的次数为k, 因为$k \le n$-1, 所以2～ 5 步的时间复杂性为$O(mn)$;

⑤步骤6 为的复杂性为$O(n)$。

所以该算法的时间复杂性为$O(mn)$, 对平面交通网络而言, $m = O(n)$, 所以本文所给算法的时间复杂性为$O(n^2)$。

4　实例

图3 为西安市部分路网, 起点s与终点t之间的道路为交通要道, 某公司每天有大量的物资从仓库s运送到火车站t, 然后将货物运送到各地。车辆沿着s至t的最短路径行驶, 然而由于交通事故等突发事件的发生, 经常造成道路发生中断, 使得该公司的运货车辆不得不绕行, 为了保证所需货物及时赶到车站, 问什么时间出发可以保障不耽误准点到达终点?

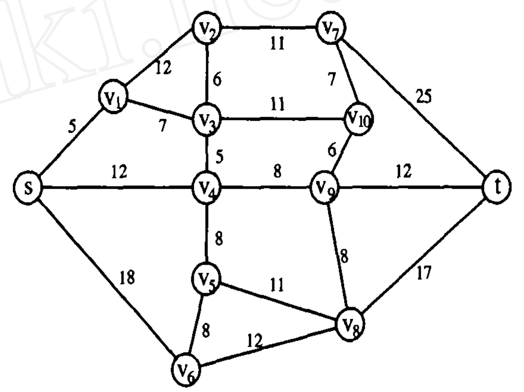

图3　局部城市道路网络图

对于该问题, 其实质是要求在不完全信息(仅知道发生一次道路堵塞, 但不知道那条路段中断) 情形下, 当最短路径上的一条边中断时, 对s与t之间的交通网络最短路径造成最大损失(此情形下所走的最大实际行程), 从而在实际的运输管理中避免这种最坏情形的发生。如图3 所示, 起点s与终点t之间的最短路径为$s \to v_4 \to v_9 \to t$, 对应的最短路径长为32。为了比较分析最短路径关键边、最长绕行路关键边和不完全信息下的最短路径关键边三个问题, 分别计算这三个问题的关键边, 计算结果如表1 所示。

表1　计算结果

	最短路径关键边	最长绕路关键边	不完全信息下的最短路径关键边		
	$d_{G-e}(s, t)$	$d_{G-e}(u, t)$	$d_G(s, u)$	$d_{G-e}(u, t)$	$d_{G-e}(s, t)$
边(s, v_4)中断	37	37-32=5	0	37	37
边(v_4, v_9)中断	41	34-20=14	12	34	46
边(v_9, t)中断	45	25-12=13	20	25	45
e^*	边(v_4, v_9)	边(v_4, v_9)	边(v_9, t)		

比较上述结果可以发现:

(1) 不完全信息下最短路径关键边问题的总行程比最短路径关键边情形时多走了 1 单位的距离, 这是由于最短路径关键边问题在出发前就已具有路段中断的完全信息, 而不完全信息下最短路径关键边问题并不具有这些完全信息。两者所走的线路分别为$s \to v_4 \to v_9 \to v_8 \to t$ 和$s \to v_4 \to v_3 \to v_{10} \to v_9 \to t$;

(2) 不完全信息下最短路径关键边问题的总路程比最长绕路关键边情形时多走了 5 单位的距离, 这是由于最长绕路关键边问题从局部角度出发, 仅仅考虑绕行路的路长, 而不完全信息下最短路径关键边问题从全局角度出发, 不仅考虑了绕行路的路长, 还考虑了绕路前已经行驶的距离;

(3) 上述三个问题的最终结果是不一样的。最长绕路关键边和不完全信息下最短路径关键边是(v_4, v_9) 边, 而最短路径关键边为(v_4, v_9) 边, 上述三个问题所求解的关键边与其目标函数和网络结构紧密相关。

通过上述计算结果的比较, 从交通运输管理角度来看, 不完全信息下的最短路径关键边问题更贴近实际中的不确定情形, 因此也更具有实际意义。

5 结论

在交通运输中, 经常由于各种突发事件(如交通事故、自然灾害等) 导致道路中断的现象时有发生, 然而由于突发事件的不可预见性, 使得行驶的车辆无法得到行进线路上道路中断的完全信息, 因此本文研究具有十分重要的现实意义。本文给出了计算不完全信息下最短路径关键边的子树连通算法, 该算法的时间复杂性为$O(n^2)$, 其中n 为节点数。并结合实际城市道路交通网络的算例, 说明了不完全信息下最短路径关键边更具有实际意义。本文所给算法是有效的, 但并不是最好的算法, 还可以使用特殊的数据结构(如 Fibonacci Heaps 或阿克曼反函数) 来进一步降低算法的时间复杂性。此外, 不完全信息下的最短路径关键点问题可以作为进一步研究方向。

参考文献:

[1] Corley H W, Sha D Y. Most vital links and nodes in weighted networks [J]. Operation Research Letters, 1982, (1): 157 ～ 161.

[2] 李引珍, 郭耀煌. 交通运输网络最短路径关键边问题研究[J]. 中国管理科学, 2004, 12 (4): 69 ～ 73.

[3] Malik K, Mittal A K, Gupta S K. The k most vital arcs in the shortest path problem [J]. Operation Research Letters, 1989, (8): 223 ～ 227.

[4] Nardelli E, Proietti G, Widmyer P. A faster computation of the most vital edge of a shortest path between two nodes [J]. Information Processing Letters, 2001, 79 (2): 81 ～ 85.

[5] Nardelli E, Proietti G, Widmyer P. Finding the detour critical edge of a shortest path between nodes [J]. Information Processing Letters, 1998, 67 (1): 51 ～ 54.

The Most Vital Edge of the Shortest Path with Incomplete Information in Traffic Networks

YAN Hua-hai[1], XU Yin-feng[1,2]

(1. School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;
2. The State Key Lab for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an 710049, China)

Abstract: There are always many road blockages caused by unexpected events such as accident or disasters in traffic networks. The vehicle can not get the information of edge failure until it travels to the blockage edge. This paper aims at the most vital edge of the shortest path problem with the incomplete information. Firstly, this paper states the concept of the most vital edge of the shortest path with incomplete information (MVEP-II). Secondly, it presents an algorithm of computing the MVEP-II and analyses its time complexity, and then a numerical result of urban traffic networks is given. In the end, by comparing the realistic result of MVEP-II problem, the longest detour problem and the most vital edge problem, we conclude that MVEP-II problem is more practically significant.

Key words: Most Vital Edge; Incomplete Information; Shortest Path; Algorithm