文章编号:1003 - 207(2005) 05 - 0033 - 06

具有概率分布在线租赁问题策略研究

徐维军[1] ,**徐寅峰**[1,2]

(1. 西安交通大学管理学院 ,陕西 西安 710049
2. 机械制造系统工程国家重点实验室 ,陕西 西安 710000)

摘 要:在经济系统中 ,决策越来越呈现出在线性特征 ,传统优化方法在解决这类在线问题时 ,通常假设未来输入是一随机变量从而寻求概率意义上的最优决策。近年来 ,在优化领域兴起了一种新的研究方法 ——在线算法与竞争分析 ,为解决这类在线问题提供了新的视角 ,但传统的竞争分析方法有意规避概率分布假设。对于在线租赁决策问题 ,由于其输入结构简单且具有良好的统计性质 ,似乎忽略这些有用的信息而只运用标准的竞争比方法分析显然具有不足之处。在本文中 ,我们将其输入结构的概率分布引入纯竞争分析方法中 ,从而建立了具有概率情形的最优在线租赁模型 ,并得到了最优竞争策略及其竞争比。

关键词:在线算法;金融租赁;竞争分析;竞争比
中图分类号:F830 **文献标识码**:A

1 引言

现代金融租赁(financial leasing)产生于 20 世纪 50 年代 ,在世界各国得以迅速发展 ,金融租赁不同于传统的一般租赁活动 ,它具有重要的融资功能 ,特别是在银行贷款紧缩和资本市场融资困难的情况下 ,金融租赁是一种新的灵活便利的融资方式 ,它可以通过融物进而达到融资的目的 ,它对于企业迅速获得设备投入 ,提高企业资金利用效率 ,促进企业改善经营管理 ,提高企业经济效益具有重要作用。虽然我国自 80 年代初期以来 ,金融租赁作为新兴产业开始出现 ,但是并未获得健康长足的发展。据世界租赁年报统计 ,2000 年全球设备租赁交易额已达 5000 亿美元 ,金融租赁在设备投资中所占比例 ,美国已连续 5 年保持在 30 %以上 ,日本及欧洲等发达国家均在 10～20 %之间 ,金融租赁已成为仅次于银行贷款的第二大筹资工具。而我国近几年来设备租赁交易额仅占全部设备交易额的 1 %左右 ,市场潜力之大是可以想象的。因此业界人士称金融租赁业是中国 21 世纪的“朝阳产业”。然而对于金融租赁问题的研究 ,虽然已经取得了许多进展 ,但传统的研究只是遵循投资项目风险管理方法进行分析 ,特别是绝大多数研究都侧重于资产租赁合同分析及税收对租赁与购买决策的影响 ,如文献[1 - 4]以及在投资决策上侧重于传统的收益 - 成本比较分析研究。例如 ,对于租赁合同的存在 ,一个理性的认识就是减少了税率支付。如果出租人和承租人面对着不同收益的边际税率时 ,进行租赁能够降低总的税收支付 ,进而税收的存在也引出了新的研究新题 ,即当评估一个租赁合同时一个合适的折扣率应该是多少 ?

无论如何 ,面对经济日益全球化 ,竞争日趋加剧 ,科技飞速发展 ,以及信息传递的加快 ,各种决策越来越呈现出在线特征 ,特别是在经济金融领域 ,存在着很强的动态特征 ,即在没有获得未来足够信息时就必须对当期需求做出决策 ,对于这类即时决策问题我们称为在线问题。租赁问题是经济学一个基础的在线决策问题。它假设在线人需要使用某种仪器(例如汽车 ,仪器等) ,但并不清楚知道自己到底会用多长时间 ,只有在每个阶段开始时才能决定是继续用还是不用。因此他有两种解决方法:一是每期付较小的费用一直租赁;另一种就是花更高的价钱将其买下来。一旦在线人买下了仪器 ,就不必再付租赁费用。因为只有在每个阶段初才知道以后还需不需要这个仪器 ,所以决定什么时候租用 ,什么时候购买是问题的关键。关于这个在线决策问题实质上就是寻求最佳停止时刻 ,即在线人一直采取租赁策略直到某一时刻突然购买使该决策结束。传统的研

收稿日期:2004 - 05 - 19; **修订日期**:2005 - 08 - 31
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10371094) ;国家自然科学基金资助项目(70471035)
作者简介:徐维军(1975 -) ,男(汉族) ,宁夏人 ,西安交通大学管理学院博士生 ,研究方向:在线算法与金融工程.

究方法(即经典的贝叶斯分析方法)通常是假定未来需求序列服从某种概率分布,然后寻求某种概率意义上的最优决策[5]。大量研究文献[6]表明租赁决策问题的未来输入结构简单且有良好的统计性质,事实上该决策问题是属于一类典型的生存分析问题,可以运用时间序贯计划方法加以解决。对于连续型问题,指数类分布是其典型的生存函数之一,如文献[7]研究了生存分布为指数类分布情形时间序贯计划的贝叶斯停止法则和判决法则。文献[8]研究了线性指数危险率模型的贝叶斯停止判决问题等。文献[9]对于两个指数类分布模型的判别分析问题给出了贝叶斯停止法则和判决法则。

然而近年来,在算法领域兴起了一种新的优化方法——在线算法与竞争分析(online algorithm and competitive analysis),随后在线算法的研究成果层出不穷,已经成为一个非常值得注意的新研究方向。尤其近年来,随着在经济管理当中发现越来越多的在线问题,该研究方法在金融决策及经济管理领域也引起了越来越多的重视,随着大量的在线金融决策文献的涌出[10-16],已表明竞争策略在经济管理决策领域是有效的,这种方法引起了人们的兴趣和产生了非明显性(non-obvious)的算法和分析。但是传统的竞争策略分析通常假设在线投资者对于未来需求序列的信息一无所知,即有意规避未来需求的概率分布假设。因此,在线投资者在面对未来尽可能坏的需求序列要尽可能好地设计出一个好的投资策略,即所谓最坏情形分析。然而竞争比的风险规避性质通常是一大缺陷,因为这个性能度量导致了过于保守的算法。因为在输入序列的进程中,当决策者拥有一些边信息(side information)和部分统计知识时,即当决策者对随机过程掌握了可以明确不确定性的可靠信息时,似乎忽略这些极有价值的信息而只运用标准的竞争比方法分析是一个极大浪费,从而导致了比贝叶斯算法差的结果。事实上,并非所有的在线问题未来输入分布都是非常难以刻画的,对于一些简单输入结构比如本文所研究的在线租赁问题,运用概率分布假设能大大提高竞争比性能分析。

由此可见,传统的贝叶斯分析方法总是认为未来输入具有良好的概率分布特征,然而传统的纯竞争分析方法却通常有意避免概率分布假设。事实上,大量统计理论研究表明在线租赁问题输入结构简单且具有良好的统计特性,特别是具有良好的指数类分布特性。因此本文基于以上考虑,本文将结合传统优化方法所强调的输入结构的指数类统计性质对 Karp 等人提出的模型进行了扩展和改进,即运用在线算法与竞争策略分析方法研究了当未来需求序列服从概率分布时的在线租赁问题。在本文中,我们分析了连续性情形,即当输入结构具有指数类分布时的在线租赁问题,从而建立了具有概率情形的最优在线租赁模型,并得到了最优的竞争策略及其竞争比。同时,我们也给出了最优决策日期 k_0 的一个范围估计,并且还考虑了在最坏情形时,即当购买价格很大时,如何确定决策日期 k_0 的方法以及确定 k_0 的复杂程度?

2 具有概率情形在线租赁优化模型

本文将运用竞争分析方法研究在线租赁决策问题,关于租赁问题最典型的例子是 1992 年 Karp 提出的在计算机理论科学领域最负有盛名的“租雪橇”问题[10]。随后,许多学者对其基本模型进行了一系列广泛深入的研究[10-14]。在租赁活动当中,投资者每期必须做出是继续租用还是立即购买该设备的决策。若投资者知道未来使用期限,则为离线问题;若投资者不知道未来使用期限,则为在线问题。令 t 为实际发生的租赁次数,每天租金为 1,购买该设备价格为 s。另外,假定购买设备时还存在税率因子 $\tau(0 < \tau < 1)$,则购买该设备的总成本为 $s(1+\tau)$。对于离线问题,当 $s(1+\tau) \le t$ 时购买该设备,否则租用。显然离线问题的最优解为:

$$Cost_{OPT}(t) = \min\{s(1+\tau), t\}. \qquad (1)$$

对于在线问题,我们一般研究这样一大类策略 $A(k)$:即有 k 期一直租用,之后如果继续需要则立即购买($k=1,2,\cdots$)。也即在线策略是当 $t \le k$ 时,一直租用;当 $t > k$ 时,则立即购买该设备,则有

$$Cost_{ON}(t,k) = \begin{cases} t & t \le k; \\ k + s(1+\tau) & t > k. \end{cases} \qquad (2)$$

通过简单的推导分析则有下列结论。

定理 1. 投资者采取的最优策略为 $A(s(1+\tau)-1)$,其最优竞争比为 $2 - \dfrac{1}{s(1+\tau)}$。

由于在线租赁问题的输入结构简单且具有良好的统计性质,将其未来信息分布引入传统的纯竞争分析方法当中能够使得竞争比分析性能大大提高,首先我们给出连续性概率型竞争比定义。

定义 1. 假设租赁次数(输入序列)为一随机变量 X,具有某种类型概率分布的密度函数为 $f(t)$,则连续性概率型竞争比为:

$$C(k) = E_x \frac{Cost_{ON}(X, k)}{Cost_{OPT}(X)} = \int_{t=0}^{\infty} \frac{Cost_{ON}(t, k)}{Cost_{OPT}(t)} \cdot f(t)\, dt,$$

这里, $f(t)$ 是投资者对未来输入结构概率分布的密度函数近似估计,本文研究了输入结构具有指数类分布特征。

应注意,本文所定义的概率性竞争比与文献[10,12]中所定义的随机性竞争比(randomized competitive ratio)有着本质的区别,前者是对输入结构给定了某种概率约束,也即掌握了输入结构的一定信息分布规律,而后者是对在线者或者对手(adversary player)的可供选择的策略集合内进行随机化选择策略。因此在此使用不同术语暗示区分。

首先我们考虑当输入结构具有超指数分布特征时,其密度函数为

$$f(t) = 2\beta^2\lambda e^{-2\beta\lambda t} + 2(1-\beta)^2\lambda e^{-2(1-\beta)\lambda t},$$

其中 λ 和 β 为参数, $\lambda > 0, 0 < \beta \leq 0.5$。这个分布意味着在未来输入的每阶段活动当中,立即购买的危险率(hazard,然死亡率,也即活动终止率)为 λ,继续租用的危险率为 $1-\lambda$。若 $\beta = 0.5$,则退化为指数分布的情形。按照上面所给出的概率型竞争比定义,则有:当 $0 < k \leq s(1+\tau)$ 时

$$R_1(k) = 1 + [k + s(1+\tau)] \int_k^{s(1+\tau)} \frac{1}{t}[2\beta^2\lambda e^{-2\beta\lambda t} + 2(1-\beta)^2\lambda e^{-2(1-\beta)\lambda t}]\, dt - \beta e^{-2\beta\lambda k} - (1-\beta) e^{-2(1-\beta)\lambda k} + \frac{k + s(1+\tau)}{s(1+\tau)}[\beta e^{-2\beta\lambda s(1+\tau)} + (1-\beta) e^{-2(1-\beta)\lambda s(1+\tau)}]. \tag{3}$$

另一方面,当 $k > s(1+\tau)$ 时,

$$R_2(k) = 1 + \left[\beta - \frac{1}{2\lambda s(1+\tau)}\right] e^{-2\beta\lambda k} + \left[1 - \beta - \frac{1}{2\lambda s(1+\tau)}\right] e^{-2(1-\beta)\lambda k} + \frac{1}{2\lambda s(1+\tau)}[e^{-2\beta\lambda s(1+\tau)} + e^{-2(1-\beta)\lambda s(1+\tau)}]. \tag{4}$$

我们得到了下面一个重要而又有趣的结论:

定理 2. 当投资者从事一项租赁活动时,假定输入序列服从超指数分布,其密度函数为 $f(t) = 2\beta^2\lambda e^{-2\beta\lambda t} + 2(1-\beta)^2\lambda e^{-2(1-\beta)\lambda t}$ $(\lambda > 0, 0 < \beta \leq 0.5)$,则根据概率型竞争比定义有:

1. 当 $\frac{1}{2\beta\lambda} \leq s(1+\tau)$ 时,即当投资者采取总是租赁的加权平均成本小于购买价格时,采取永远租赁是最优的策略,此时达到的竞争比为 $1 + \frac{1}{2\lambda s(1+\tau)}[e^{-2\beta\lambda s(1+\tau)} + e^{-2(1-\beta)\lambda s(1+\tau)}]$;

2. 当 $\frac{1}{2(1-\beta)\lambda} \geq s(1+\tau)$ 时,即当投资者采取总是租赁的加权平均成本等于购买价格时,采取第 k_0 期购买是最优的策略,且 k_0 满足 $2(1-\beta)\lambda(1+\tau)^2 s^2 - 0.1 s(1+\tau) < k_0 < 2(1-\beta)\lambda(1+\tau)^2 s^2$,此时最优竞争比为 $1 - \beta[1 - 2\beta\lambda s(1+\tau) - 2\beta\lambda(1+\tau)^2 s^2 k_0] e^{-2\beta\lambda k_0} - (1-\beta)[1 - 2(1-\beta)\lambda s(1+\tau) - \frac{2(1-\beta)\lambda(1+\tau)^2 s^2}{k_0}] e^{-2(1-\beta)\lambda k_0}$。在最坏情形下,关于最优的决策日期 k_0 的确定可通过二分搜索算法在多项式时间 $O(\log s(1+\tau))$ 内完成。

3. 当 $\frac{1}{2(1-\beta)\lambda} < s(1+\tau) < \frac{1}{2\beta\lambda}$ 时,如果常数 $\delta < 0$,则为第一种情形,如果常数 $\delta > 0$,则为第二种情形,其中 $\delta = \beta[\frac{1}{s(1+\tau)} - 2\beta\lambda] e^{-2\beta\lambda s(1+\tau)} + (1-\beta)[\frac{1}{s(1+\tau)} - 2(1-\beta)\lambda] e^{-2(1-\beta)\lambda s(1+\tau)}$。

3　在线租赁策略的竞争分析

首先,对 $R_1(k)$ 关于变量 k 分别求一阶导数和二阶导数,以及 $R_2(k)$ 关于变量 k 求一阶导数得:

$$R_1'(k) = \int_k^{s(1+\tau)} \frac{1}{t}[2\beta^2\lambda e^{-2\beta\lambda t} + 2(1-\beta)^2\lambda e^{-2(1-\beta)\lambda t}]\, dt - \frac{s(1+\tau)}{k}[2\beta^2\lambda e^{-2\beta\lambda k} + 2(1-\beta)^2\lambda e^{-2(1-\beta)\lambda k}] + \frac{1}{s(1+\tau)}[\beta e^{-2\beta\lambda s(1+\tau)} + (1-\beta) e^{-2(1-\beta)\lambda s(1+\tau)}],$$

$$R_1''(k) = \frac{2\beta^2\lambda e^{-2\beta\lambda k}}{k^2}(1+\tau)(s - k + 2\beta\lambda ks) + \frac{2(1-\beta)^2\lambda e^{-2(1-\beta)\lambda k}}{k^2}(1+\tau)[s - k + 2(1-\beta)\lambda ks],$$

$$R_2'(k) = \beta\left[\frac{1}{s(1+\tau)} - 2\beta\lambda\right] e^{-2\beta\lambda k} + (1-\beta)\left[\frac{1}{s(1+\tau)} - 2(1-\beta)\lambda\right] e^{-2(1-\beta)\lambda k}.$$

第一种情形分析,当 $\frac{1}{2\beta\lambda} \leq s(1+\tau)$ 时,投资者应该采取永远租赁策略由于 $R(k)$ 严格单调递减:我们能够判断出 $R_1''(k) > 0 (0 < k < s(1+\tau))$。另外,

$$\lim_{k \to s(1+\tau)-0} R_1'(k) = \beta\left[\frac{1}{s(1+\tau)} - 2\beta\lambda\right] e^{-2\beta\lambda s(1+\tau)} + (1-\beta)\left[\frac{1}{s(1+\tau)} - 2(1-\beta)\lambda\right] e^{-2(1-\beta)\lambda s(1+\tau)} < 0,$$

这意味着 $R_1'(k) < 0$ 且 $R_1(k)$ 在 $0 < k < s(1+\tau)$ 上

严格单调递减。我们不难看到 $R_2(k)$ 在 $k > s(1+\tau)$ 上也严格单调递减($R_2'(k) < 0$)。注意到

$$\lim_{k\to\infty} R_2(k) = 1 + \frac{1}{2\lambda s(1+\tau)}[e^{-2\beta\lambda s(1+\tau)} + e^{-2(1-\beta)\lambda s(1+\tau)}].$$

第二种情形分析,当 $\frac{1}{2(1-\beta)\lambda} \geq s(1+\tau)$ 时,投资者应该采取租赁 k_0 次再购买的策略由于 $R(k)$ 在 $0 < k < k_0$ 上严格单调递减,在 $k > k_0$ 上严格单调递增;前面已指出 $R_2'(k)$ 在 $0 < k < s(1+\tau)$ 上大于零,又由于 $\lim\limits_{k\to s(1+\tau)-0} R_1'(k) > 0$, $\lim\limits_{k\to 0} R_1'(k) = -\infty$。

我们得知存在 k_0 使 $R_1(k)$ 在 $0 < k < s(1+\tau)$ 上达到最小。另一方面,容易看到 $R_2(k)$ 在 $k \geq s(1+\tau)$ 上严格单调递增($R_2'(k) > 0$)。因此, $R(k)$ 在 $(0, +\infty)$ 上最优的竞争比为 $R(k_0)$,通过令 $R_1'(k_0) = 0$,得

$$R(k_0) = 1 - \beta\left[1 - 2\beta\lambda s(1+\tau) - \frac{2\beta\lambda s^2(1+\tau)^2}{k_0}\right] e^{-2\beta\lambda k_0} - (1-\beta)\left[1 - 2(1-\beta)\lambda s(1+\tau) - \frac{2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)^2}{k_0}\right] e^{-2(1-\beta)\lambda k_0}。$$

关于最优购买时间 k_0 的范围确定。k_0 是方程 $R_1'(k) = 0$ 的解,我们注意到很难求出 k_0 的解析表达式。但我们却给出了 k_0 的取值范围:

$$2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)^2 - 0.1s(1+\tau) < k_0 < 2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)^2。$$

分析如下:由于 $\frac{1}{2(1-\beta)\lambda} > s(1+\tau)$,因此令 $a = 2(1-\beta)\lambda s(1+\tau)$,显然 $0 < a < 1$。又由于 $k \leq t \leq s(1+\tau)$,可知 $\frac{1}{s(1+\tau)} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{ks(1+\tau)}[t - s(1+\tau)] + \frac{1}{s(1+\tau)}$。

$$R_1'(k) \geq \frac{1}{s(1+\tau)}\int_k^{s(1+\tau)}[2\beta^2\lambda e^{-2\beta\lambda t} + 2(1-\beta)^2\lambda e^{-2(1-\beta)\lambda t}]dt - \frac{s(1+\tau)}{k}[2\beta^2\lambda e^{-2\beta\lambda k} + 2(1-\beta)^2\lambda e^{-2(1-\beta)\lambda k}] + \frac{1}{s(1+\tau)}[\beta e^{-2\beta\lambda s(1+\tau)} + (1-\beta)e^{-2(1-\beta)\lambda s(1+\tau)}],$$

$$= \beta\left[\frac{1}{s(1+\tau)} - \frac{2\beta\lambda s(1+\tau)}{k}\right]e^{-2\beta\lambda k} + (1-\beta)\left[\frac{1}{s(1+\tau)} - \frac{2(1-\beta)\lambda s(1+\tau)}{k}\right]e^{-2(1-\beta)\lambda k} > (1-\beta)\left[\frac{1}{s(1+\tau)} - \frac{2(1-\beta)\lambda s(1+\tau)}{k}\right]e^{-2(1-\beta)\lambda k},$$

故求得 k_0 的上界为 $k_0^H = as(1+\tau)$。

$$R_1'(k) \leq \int_k^{s(1+\tau)}\left[-\frac{1}{ks(1+\tau)}(t - s(1+\tau)) + \frac{1}{s(1+\tau)}\right][2\beta^2\lambda e^{-2\beta\lambda t} + 2(1-\beta)^2\lambda e^{-2(1-\beta)\lambda t}]dt + \frac{1}{s(1+\tau)}[\beta e^{-2\beta\lambda s(1+\tau)} + (1-\beta)e^{-2(1-\beta)\lambda s(1+\tau)}] - \frac{s(1+\tau)}{k}[2\beta^2\lambda e_{-2\beta\lambda k} + 2(1-\beta)^2\lambda e^{-2(1-\beta)\lambda k}],$$

$$= \frac{1}{ks(1+\tau)}\int_k^{s(1+\tau)}(s(1+\tau) - t)[2\beta^2\lambda e^{-2\beta\lambda t} + 2(1-\beta)^2\lambda e^{-2(1-\beta)\lambda t}]dt + \left[\frac{1}{s(1+\tau)} - \frac{2\beta\lambda s(1+\tau)}{k}\right]\beta e^{-2\beta\lambda k} + \left[\frac{1}{s(1+\tau)} - \frac{2(1-\beta)\lambda s(1+\tau)}{k}\right](1-\beta)e^{-2(1-\beta)\lambda k} < \frac{(1-\beta)^2\lambda e^{-2(1-\beta)\lambda k}}{ks(1+\tau)}\left\{k^2 - 2\left[s(1+\tau) - \frac{1}{2(1-\beta)\lambda}\right]k - s^2(1+\tau)^2\right\},$$

故求得 k_0 的下界为 $k_0^L = s(1+\tau)\left[(1-\frac{1}{a}) + \sqrt{(1-\frac{1}{a})^2 + 1}\right]$.

综上所述, k_0 的范围在 $k_0^L < k_0 < k_0^H$。令

$$d(a) = s(1+\tau)\left[a - (1-\frac{1}{a}) - \sqrt{(1-\frac{1}{a})^2 + 1}\right]。$$

当 $d(a)$ 求一阶导数等于 0,解得当 $a = 0.366$ 时使 $d(a)$ 达到最大,并有 $d(0.366) < 0.099s$。因此我们得到了 k_0 的估计范围。

当 $s(1+\tau)$ 较小时,最优决策日期 k_0 容易确定。如当 $s(1+\tau) = 100$ 时,只需要比较 10 个 $R_1(k)$ ($k = [2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)2 - 0.1s(1+\tau)], \cdots, [2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)^2]$),就可以得到最优的投资策略 $A(k_0)$ 及其竞争比 $R(k_0)$。在此我们从最坏情形考虑,即当 s 充分大时,下面给确定最优决策日期 k_0 的简便算法及所需时间复杂度。前面已经指出,方程式 $R_1'(k_0) = 0$ 关于 k_0 为非线性方程,不易求出 k_0 的解析表达式,但是当投资者从事一项具体租赁活动时,只要估计出危险率 λ 及参数 β 的取值大小, $s(1+\tau)$ 相对容易确定,那么关于 k_0 可通过如下二分搜索算法在多项式时间内确定。另外,记 $B(k) = R_1(k) = [2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)^2 - 0.1s(1+\tau)^2], \cdots, [2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)^2]$。

二分搜索算法:

步 1: 输入序列: $B([2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)^2 - 0.1s(1+\tau)])$, $B([2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)^2 - 0.1s(1+$

$\tau)]+1)$, …, $B([2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)^2])$;

步 2. 如果 $B([2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)2-0.05s(1+\tau)]+1)>0$,则删除序列 $B([2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)^2-0.05s(1+\tau)]+2)$, $B([2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)^2-0.05s(1+\tau)]+3$, …, $B([2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)^2])$;如果 $B([2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)^2-0.05s(1+\tau)]+1)<0$,则删除序列 $B([2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)^2-0.1s(1+\tau)])$, $B([2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)^2-0.1s(1+\tau)+1)$ …, $B([2(1-\beta)\lambda s^2(1+\tau)^2-0.05s(1+\tau)])$;

步 3. 在剩余的序列中重复步 2 ,直到余下两项为止。比较这两项绝对值的大小 ,并且输出最小绝对值项的下标 ,即得 k_0 。

由算法设计与复杂性分析易知可在多项式时间 $O(\log s(1+\tau))$ 求出最优决策日期 $k0$。与文献 [10] , [12] 相比较 ,最优决策日期相对提前。第三种情形分析 ,易得 ,故略。

另外 ,当 $\beta=0.5$,则输入序列具有超指数分布退化为指数分布特征的在线租赁问题 ,其密度函数为 $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda>0$,其中 λ 为参数。这个分布也意味着在未来输入的每阶段活动当中 ,立即购买的危险率(hazard ,突然死亡率 ,也即活动终止率) 为 λ ,继续租用的危险率为 $1-\lambda$。类似地 ,我们也能得到下面结论。

定理 3. 当投资者从事一项租赁活动时 ,假定对未来需求信息特征服从指数分布 ,其密度函数为 $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}(\lambda>0)$,则最优的策略及其竞争比为:

(1) 当 $\frac{1}{\lambda}\leq s(1+\tau)$ 时 ,即当投资者采取总是租赁的平均成本小于购买价格时 ,最优的策略是永远租赁下去 ,其竞争比达到 $1+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda s}$;

(2) 当 $\frac{1}{\lambda}>s(1+\tau)$ 时 ,即当投资者采取总是租赁的平均成本大于购买价格时 ,最优的策略是先租 k_0 次再购买 ,且 k_0 满足 $\lambda s^2(1+\tau)^2-0.1s(1+\tau)<k_0<\lambda s^2(1+\tau)^2$,其竞争比达到 $1-[1-\lambda s(1+\tau)-\frac{\lambda s^2(1+\tau)^2}{k_0}]e^{-\lambda k_0}$。在最坏情形下 ,关于最优的决策日期 k_0 的确定可通过二分搜索算法在多项式时间 $O(\log s(1+\tau)$ 内完成。

我们注意到 ,由于输入结构信息的引入 ,投资者的最优决策要么永远的租赁下去 ,要到相对于文献[10 ,12]最优的日期提前。且竞争比性能也得到很好改善 ,如定理 2 中 ,当 $s=10$, $\lambda=0.2$, $\tau=0$ 时 ,最优竞争比将达到 1.068 ,优于文献[12] 中的最优竞争比 1.582 ,也优于文献[10] 中的最优竞争比 1.9。另外 ,当 $\tau\to0$ 时 ,可以得到不存在税率情形时的相应结论。

通过以上分析所知 ,当引入在线输入结构的概率信息时得到了具有概率意义上的最优在线投资策略及其最优竞争比大小。对于概率分布中的参数估计可运用概率统计中极大似然法进行估计 ,其中参数的抽样样本可参照其他承租人的租期数或由专家组根据各自拥有的信息给出租期数。通过数值分析 ,发现当引入税率因素后 ,导致最优购买时间推迟且使竞争比降低 ,当税率因素增大时 ,竞争比越小且购买决策也相应推迟 ,这说明投资成本越大 ,投资者将会采取更加理性的、谨慎的投资策略。因此 ,税率的存在降低了决策的不确定性。同理 ,在引入利率等重要市场因素后也可得到相应结论。另外 ,当概率分布中的参数取不同值时 ,发现参数的变化对于最优投资决策及竞争比的大小有显著的影响。由此可见 ,设计一个合理的在线租赁决策模型的关键在于能否准确地估计其未来输入结构的信息。

4　结束语

对于融资租赁项目管理 ,传统意义上评估一个租赁项目的投资决策方法主要有静态分析与动态分析方法 ,即对未来各期盈利能力进行评估 ,然后进行投资成本与折现收益比较 ,再决定是否投资。从本质上讲 ,传统决策方法是收益与成本之间进行比较分析 ,而在线算法决策方法是成本与成本之间或者收益与收益之间进行比较分析。在线算法是在确定投资的前提下 ,从事前给定的策略集中找出相对于离线策略而言最优的投资方案 ,也就是说 ,在线算法始终与其相应的某一基准算法进行比较。它提供了一种在某种一般意义下任何两种可比较策略的性能统一度量。因此在线算法决策方法也是对于传统决策方法的一个有益补充 ,同时在线策略设计也为决策者提供了一种新的投资理念和启示[17 ,18]。尤其是对于现实中大量存在输入结构比较简单的在线问题 ,如果我们能够将信息分布特征与纯竞争分析方法结合起来分析 ,更能使竞争比性能分析得到改善 ,使我们的分析结果更符合于实际问题 ,以此达到我们提高决策效率的目的。

参考文献:

[1] Schall L D. The lease - or - buy and asset acquisition deci-

sions[J].Journal of Finance ,1974 ,29 :1203 - 1214.

[2] Moller M H ,Upton C W. Leasing ,buying and the cost of capital services [J]. Journal of Finance , 1976 , 31 : 761 - 768.

[3] Lippman S A ,McCall J J. The economics of uncertainty: Selected topics and probabilistic methods[C]. In K. J. Arrow and M. D. Intriligator ,editors , Handbook of Mathematical Economics. North - Holland ,1981 ,1(6) :211 - 284.

[4] Mirman L J. Uncertainty and optimal consumption decisions[J]. Econometrica ,1971 ,39 :179 - 185.

[5] 张金隆 ,王林 ,陈涛 ,曾宇容 . 连续生产模式下的不常用备件联合采购优化分析[J]. 中国管理科学 ,2004 ,12 (5) :58 - 62.

[6] 黎子良 ,郑祖康 . 生存分析[M]. 杭州:浙江科学技术出版社 ,1993.

[7] Zheng Z G,Fang K T. Bayesian procedure in time sequential sample plan[R]. 北京大学技术报告 ,1995.

[8] Wei L L ,Zhang W X. Bayesian procedure in classification problem with linear exponential hazard function [J]. Acta Mathematica Scientia ,2003 ,23(4) :436 - 443.

[9] 张俐杰 ,杨景平 . 一类判别分析问题的 Bayes 解[J]. 兰州大学学报(自然科学版) ,2000 ,36(3) :36 - 41.

[10] Karp R. Online algorithms vessus offline algorithms. How much if it worth to know the future[J]. Proc. IFIP 12th World computer Congress ,992 ,1 :416 - 429.

[11] Karlin A R, Manaees M S, Mc Geogh L, Owichi S. Competitive randomize algorithms for nonuniform problems[J]. Algorithmica ,1994 ,11(1) :542 - 571.

[12] Yaniv R E ,Kaniel R ,Linial N. Competitive optimal on - line leasing[J]. Algorithmica ,1999 ,25 :116 - 140.

[13] al - Binali S. A risk - reward framework for the competitive analysis of financial games[J]. Algorithmica ,1999 ,25 : 99 - 115.

[14] Fujiwara H ,Iwama K. Average - case competitive analyses for ski - rental problems[J]. ISAAC ,2002 ,476 - 488.

[15] Fiat A ,Woeginger GJ. Online algorithms: The state of art [M]. Springer ,1998 :368 - 370.

[16] Borodin A , Yaniv R E. Online computation and competitive analysis[M]. Cambridge University Press ,1998.

[17] 杨永福 ,朱桂龙 . 管理模式和方法创新分析及其启示[J]. 中国管理科学 ,1999 ,7(2) :67 - 75.

[18] 高农昌 ,何平 . 决策过程及最优决策时刻分析[J]. 中国管理科学 ,1995 ,3(4) :53 - 58.

Strategy Research for Online Leasing Problem with Probability Distribution

XU Wei - jun[1] **, XU Yin - feng**[1,2]

(1. School of Management ,Xi'an Jiaotong University ,Xi'an 710049 ,China ;

2. The State Key Lab for Manufacturing Systems Engineering ,Xi'an 710049 ,China)

Abstract : In economic system ,the decision making is representing the online characteristics. Dealing with online decision problem ,the traditional Bayesian analysis often depends on the probabilitic assumptions so that it gives out the optimal result in the probability sense. However ,there is coming a focus in the algorithmic fields in the recent years ,which is the online algorithms and competitive analysis. It gives a new angle of view to deal with online problem ,but this method always intentionally avoids probabilistic distribution. For the online leasing problem ,beacuse its input structure has a simple and good statistical property ,it would be a waste to ignore this knowledge which is precisely what the traditional competitive ratio does. In this paper ,we introduce the information distribution of future input into the competitive analysis so as to build online leasing model with probability distribution ,and obtain their optimal competitive strategies and competitive ratios.

Key words : online algorithm ;financial leasing ;competitive analysis ;competitive ratio