第 23 卷第 3 期(总第 135 期)
2005 年 3 月

系 统 工 程
Systems Engineering

Vol 23, No. 3
Mar., 2005

文章编号: 1001-4098(2005)03-0029-06

存在市场利率条件下的占线租赁策略研究*

徐寅峰[1,2], 徐维军[1], 卢致杰[1]

(1. 西安交通大学 管理学院, 陕西 西安 710049;
2. 机械制造系统工程国家重点实验室, 陕西 西安 710049)

摘 要: 基于占线租赁问题的输入结构简单且具有良好的统计特性, 运用竞争分析方法并结合输入结构的分布信息建立最优占线租赁决策模型, 突破纯竞争分析有意规避概率分布这一假设条件, 分析当存在市场利率因素时的占线租赁策略, 并给出最优的竞争策略及其竞争比。相对于 Karp 及 El-Yaniv 等人的研究结果, 由于引进了输入信息使得竞争比性能分析提高; 相对于 Fujiwara 等人的研究结果, 本文研究了存在利率时离散性情形, 给出了问题的最优解。

关键词: 占线算法; 概率性竞争比; 金融租赁; 离散型模型; 竞争分析

中图分类号: F830 **文献标识码**: A

1 引言

人们常有这样的体验: 对某一段时间内的工作和生活进行回顾与总结时, 总会情不自禁地想, 要是当初……该多好! 在管理上, 这是一个典型的局内与局外问题。置身局外, 可以看到事物的全部, 易于得出事后的最佳方案; 但身处局内, 通常只能看到事物的一部分, 难以做出最优决策。所谓"当事者迷, 旁观者清", "不识庐山真面目, 只缘身在此山中"正是这种情形的真实写照。从决策角度看, 这正是占线问题(on-line problem), 对于占线算法(on-line algorithms)和竞争策略(competitive strategy)的研究始于 1985 年, 20 年来, 在理论计算机科学领域, 相关的研究成果层出不穷, 这为占线问题的系统研究奠定了良好基础, 同时也为占线问题相关理论和方法在其他领域的应用创造了条件。近年来, 在经济管理领域出现了越来越多的占线问题, 该方法也受到了越来越多学者的重视, 尤其是随着大量的占线金融决策文献的涌出, 已表明竞争策略在金融问题领域是有效的, 特别在证券组合投资、外汇兑换及金融租赁方面的应用尤为受到关注, 一方面面对不确定性决策环境, 投资者更愿意期望获得某一较少但相对确定的收益, 而不愿意在高风险下获得比较高的平均利润, 而这种决策正是竞争分析所擅长的; 另一方面, 决策者不但追求自身利润最大化, 而且更看重跟同行的业绩比较, 然而占线算法中的竞争比分析恰恰提供了一种在某种基本意义下任何两种可比较策略的性能统一度量方法, 正是占线算法竞争分析方法的诸多优点为经济管理中占线问题的最优决策分析奠定了基础。随着占线金融决策相关论文在国内外高水平学术期刊的陆续发表, 已表明竞争策略在金融领域的应用是有效的, 目前在国内, 这种方法已经引起了研究者的广泛兴趣和产生了非明显性(non-obvious)的算法和分析[1]。

2 已有相关研究

我们首先回顾一下运用竞争分析方法分析租赁决策问题已经取得的研究, 关于占线租赁最基本的模型是 Karp 于 1992 年在理论计算机科学领域提出的最负有盛名的"租雪橇"模型[2]。即令 t 为实际发生的租赁次数, 每天租金为 1, 购买该设备价格为 s。对于离线问题, 当 $s \le t$ 时购买该设备, 否则租用。对于占线问题, 我们一般研究这样一大类策略 $A(k)$: 即前 k 期一直租用, 之后如果继续需要则立即购买($k=1, 2, \cdots$)。也即占线策略是当 $t \le k$ 时, 一直租用; 当 $t > k$ 时, 则立即购买该设备。Karp 指出最优的占线策略是投资者应当采取 $A(s-1)$, 此时最优的竞争比为 $1-2/s$。随后, 许多学者对这一基本模型进行

* **收稿日期**: 2004-04-22; **修订日期**: 2004-09-29
基金项目: 国家自然科学基金委员会优秀创新群体项目(70121001); 国家自然科学基金资助项目(10371094)
作者简介: 徐寅峰(1962-), 男, 吉林人, 西安交通大学管理学院教授, 博士生导师, 研究方向: 现代运筹学与管理科学; 徐维军(1975-), 男, 宁夏固原人, 西安交通大学管理学院博士研究生, 研究方向: 金融数学, 金融工程及占线金融算法; 卢致杰(1973-), 男, 江西赣州人, 西安交通大学管理学院博士研究生, 研究方向: 计算机科学及电子商务。

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

了一系列广泛深入的研究, 如关于租赁问题的随机占线算法(randomized on-line algorithm), Karlin 等[3]给出了竞争比为 $e/(e-1)\approx 1.582$ 最优策略。当存在利率情形时, R. El-Yaniv 等[4]给出了最优确定性算法(其竞争比大小在区间[3/2, 2]之内), 及最优随机性算法(其竞争比大小在[4/3, 1.582]之内)。S. Al-Binali[5]建立了有名的金融博弈竞争分析的风险—回报模型, 并对占线租赁问题进行了分析。他指出投资者往往并不是规避风险而是利用风险, 有时有目的的增加风险以期望如果预测成功将获得更高收益(即相对纯竞争分析提高其最优竞争比性能), 如果预测失败其风险容忍度在投资者可接受范围之内(利用竞争比概念刻画)。另外, 当购买价格波动而租赁费用保持不变或者说购买价格保持不变而租赁费用波动的情形, 文献[6]~[9]分别从离散和连续两个角度进行了研究。总之, 在已往研究中有意规避概率分布假设的分析前提下, H. Fujiwara 等[10]于 2002 年第一次突破性地将概率分布假设与竞争比分析方法结合在一起研究租赁问题, 但他们只研究了连续性占线租赁问题, 通过作图表明其竞争比大约在 1.5 左右。2004 年, 我们进一步给出了在概率环境下占线租赁问题的一些初步结论[11]。

除了运用占线竞争分析方法研究占线租赁问题外, 关于租赁问题也已经有了大量的传统研究[12-15], 如文献[12]、文献[13]侧重于资产租赁合同分析及税收对租赁与购买决策的影响。实质上占线租赁问题是一个最优停止问题, 其中在数理统计中占有重要地位的以节约成本为目的的序贯方法也可以解决类似租赁问题, 而时间序贯决策是指投资者往往更强调时间的价值, 希望当有足够的证据做出推断时应尽早停止活动, 如文献[14]、文献[15]研究了关于几何分布的最优停止问题。

3 建立占线金融租赁优化模型

我们的研究试图将传统的纯竞争分析方法与该输入结构的分布信息二者结合起来, 让投资者尽可能地利用未来需求信息来改善投资业绩, 即使得竞争比性能分析提高。本文分析了一类未来需求分布信息具有几何分布的占线租赁问题, 并引入了影响金融决策的市场利率这一重要因素, 基于这种考虑的原因如下:

首先, 虽然最坏情形竞争分析给了我们没有这一新的度量方法而不可能存在的许多漂亮的结果, 但是这一方法本身也具有不可避免的局限性。例如在换页算法中, 不同的优劣算法却有相同的竞争比[16]。同时, 估计未来输入分布的参数并不是最坏情形分析竞争算法所刻意强调得那样困难, 除了许多组合问题有更复杂的输入结构之外, 现实中也大量存在类似租赁问题的较为简单的输入结构, 我们采用发展相当成熟的统计理论能够做到较为精确地刻画这类问题的输入结构。更重要的原因是竞争比定义本身具有难以克服的固有缺陷, 虽然 Ran El-Yaniv[16]提出了八大定理建立了竞争比决策标准的公理体系。因此如何利用其它方法补充完善使得提高竞争比分析性能仍是一个研究热点, 而本文所采用方法恰好能有效地克服最坏情形竞争分析这一缺陷。

其次, 我们采用一类近似几何分布特征的思想来源于文献[14]、文献[15]研究了关于几何分布的最优停止问题及"掷硬币"思想, 出现正面(相当于租用)继续, 直到出现反面(相当于购买)停止活动。另外, 我们的研究了克服了文献[10]的以下几个不足之处: 第一, 租赁问题是一个离散型决策问题, 而文献[10]的研究采用了连续型, 其目的是避免了在处理离散问题时遇到技术上的困难, 而指数分布未必与离散型等价; 第二, 运用几何分布较指数分布更易贴切刻画租赁问题, 每阶段决策相当于做贝努利试验究竟是继续租用还是立即购买; 第三, 在离散模型下, 一开始立即购买也可能是一种最优的决策策略, 其相应的竞争比是一个有限值, 并不是他们所指出的连续型模型中其竞争比趋于无穷大; 第四, 我们研究离散型模型给出了问题的精确解, 而连续型模型有可能给出了问题的近似解。

最后, 在各种金融决策当中, 我们必须考虑投资的净现值(net present value), 也就是说市场利率是任何合理金融决策模型的一个本质特征。我们研究了当市场上存在名义利率时占线租赁的投资模型。虽然这仅仅是朝着更为合理的模型前进了一步, 但仅仅正是这一参数的引进大大细化了分析, 并得到了一些在简单模型[2,10](没有考虑利率因素)中本不存在的结论。同时, 我们充分利用投资者所拥有的信息大大提高了文献[4]中的竞争比性能分析。另外, 我们研究了实际投资当中投资者总是考虑利率因素情形, 大大降低了金融决策中的不确定性, 因此得到了比文献[12](没有利率因素的简单模型分析)中更优的竞争比性能。

本文中, 不妨仍然按照文献[4]、文献[10]中的假设, 令 t 为实际发生的租赁次数, 每阶段租赁费用为 1, 一次性购买该设备价格为 s(s 为大于等于 2 的正整数, 当 $s=1$ 时, 显然总是购买)。另外, 本文分析的前提是占线投资者在连续的时期内需要该设备。令 i 是金融市场上名义利率, 不失一般性我们假定 $1/s>i/(1+i)$。对于任何实际投资活动, 这都是一个合理的假设。因为设备的购买价格必须小于总是采取租赁策略所花费用的折现值 $s<\sum_{j=0}^{\infty}1/(1+i)^j$。否则, 占线投资者将采取永远租赁使其竞争比达到 1。令 $\beta=(1+i)^{-1}$, 显然 $s^{-1}+\beta-1>0$, 从经济学角度理解, 这是可能购买该设备的相对机会成本。另外, 记 $\Delta=(s^{-1}+\beta-1)^{-1}$。

我们考虑策略集合 $A(k)$, 则最优的离线决策最优成本为

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$Cost_{OPT}(t) = \begin{cases} \dfrac{1-\beta^t}{1-\beta}, & t \le n^* \\ s, & t > n^* \end{cases}$$

这里 n^* 是使总租赁费用折现值为 s 的次数, 解得 $n^* = \ln(1-s(1-\beta))/\ln\beta$

又根据策略集合 $A(k)$, 占线决策成本为

$$Cost_{ON}(t) = \begin{cases} \dfrac{1-\beta^t}{1-\beta}, & t \le k \\ \beta^k s + \dfrac{1-\beta^k}{1-\beta}, & t > k \end{cases}$$

定义 1　假设租赁次数(输入序列)为一随机变量 X, 具有某种类型分布的概率函数 $P(X=t)$, 则离散型概率性竞争比为

$$C(k) = E_X \frac{Cost_{ON}(X,k)}{Cost_{OPT}(X)} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{Cost_{ON}(X,k)}{Cost_{OPT}(X)} P(X=t)$$

这里, $P(X=t)$ 是投资者对未来输入结构近似估计的概率函数, 本文研究未来输入序列具有几何分布特征, 即在每阶段活动当中立即购买的危险率(hazard, 突然死亡率, 也即活动终止率) 为 $1-\theta$, 继续租用的危险率为 θ, 则相应概率函数 $P(X=t) = (1-\theta)\theta^{t-1}(t=0,1,2,\cdots)$。

应注意, 本文所定义的离散型概率性竞争比 (stochastic competitive ratio) 与文献[10]中定义的连续型平均成本竞争比定义含意一致, 而与文献[2]、文献[4]中所定义的随机性竞争比(randomized competitive ratio) 有着本质的区别, 前者是对输入结构给定了某种约束, 也即掌握了输入结构的一定信息分布规律, 而后者是对占线者或者对手(adversary player) 的可供选择的策略集合内进行随机化选择策略, 因此在此使用不同术语暗示区分。

按照上面所给出的概率性竞争比定义, 则有: 当 $k=0,1,2,\cdots,n^*$ 时,

$$C(k) = (1-\theta^k) + (1-\theta)(1-\beta^{n^*+k}) \sum_{t=k+1}^{n^*} \frac{1}{1-\beta^t}\theta^{t-1} + \left[\beta^k + \frac{1-\beta^k}{s(1-\beta)}\right]\theta^{n^*}$$

当 $k=n^*+1, n^*+2, n^*+3, \cdots$ 时,

$$C(k) = (1-\theta^{n^*}) + \frac{1-\theta}{s(1-\beta)} \sum_{t=n^*+1}^{k} (1-\beta^t)\theta^{t-1} + \left[\beta^k + \frac{1-\beta^k}{s(1-\beta)}\right]\theta^k$$

于是我们得到了下面一个重要而又有趣的结论(定理证明见附录)。

定理 1　当投资者从事一项租赁活动时, 假定对未来需求信息特征近似服从几何分布概率函数 $P(X=t) = (1-\theta)\theta^{t-1}$, 金融市场名义利率为 $i>0$, 则根据概率性竞争比定义有:

(1) 当 $1/(1-\theta) < \Delta/(1+i)$ 时, 即投资者采取总是租赁的平均成本小于相对机会成本倒数的折现值, 最优的策略是采取永远租赁, 竞争比为 $1+\dfrac{1+\beta(1-2\theta)}{\Delta(1-\beta)(1-\beta\theta)}\theta^{n^*}$;

(2) 当 $1/(1-\theta) = \Delta/(1+i)$ 时, 即投资者采取总是租赁的平均成本等于相对机会成本倒数的折现值, 最优的策略是采取第 $s-1$ 期购买, 竞争比为 $1+[\theta/(1+i)]^{n^*}$;

(3) 当 $1/(1-\theta) > \Delta/(1+i)$ 时, 即投资者采取总是租赁的平均成本大于相对机会成本倒数的折现值, 最优的策略是采取第 k_0 期购买, 竞争比为 $1+\dfrac{s\beta(1-\theta)(1-\beta^{n^*+k_0})-\beta^{n^*}(1-\beta^{k_0+1})}{\beta^{n^*}(1-\beta^{k_0+1})}\theta^{k_0}$, 这里关于最优的决策日期 k_0 的确定可通过二分搜索算法在多项式时间 $O(\log n^*)$ 内完成。且相比较文献[2]、文献[4]最优决策日期提前。

(4) 当 $1/(1-\theta)\to\infty$ 时, 即投资者采取总是租赁的平均成本趋于无穷大, 采取任何策略 $A(k)$ 的最优竞争比为 $1/s(1-\beta)+[1-1/s(1-\beta)]\beta^k$, 则最优的策略是立即购买, 竞争比接近于 1。

无论哪一种情况, 既使投资者对于危险率 θ 的估计有较大的偏差, 投资者采取 $A(n^*-1)$ 策略所到的竞争比都优于文献[2]中确定性竞争比 $2-1/s$ 及文献[4]中随机性竞争比。如 $s=10, \theta=0.5$ 和 $i=0.01$ 时, 我们得到非最优策略 $A(9)$ 的竞争比为 1.4983, 优于文献[2]的最优竞争比 1.9, 也优于文[4]中的随机竞争比 1.582。另外, 也优于文献[10]中的讨论结果, 由于本文研究了离型情况, 给出了问题的精确解。

另外, 从现代租赁的特点和类型来看, 本文研究的占线决策模型有效地刻画了经营性设备租赁决策问题, 即出租人始终拥有租赁资产的所有权, 向承租人提供的仅仅是租赁物件的使用权的一种租赁形式。经营性租赁的租赁物一般都是通用设备, 同租赁物的经济寿命相比, 承租人对租赁物的租期较短, 经营性租赁的承租人是由不固定的多数人所构成, 承租人根据自己的预期需要来确定租期的长短。

4　实例分析

本节通过具体实例说明本文所得结论的合理性, 以及模型中参数变动对于竞争比大小的影响。限于篇幅, 本文只分析了定理 1 中(1)、(3) 两种情形((2)、(4) 两种情形易得), 以及实例的结果通过作图来反映。某企业需要某一设备, 市场上租赁该设备的每期费用恒为 1, 一次性购买价格为 $s=19$。在图 1～图 4 中, 横坐标表示占线投资者采取的不同策略 $A(k)$, 纵坐标表示采取不同策略 $A(k)$ 下所对应的竞争比大小。图中曲线表示, 当市场利率 i 和危险率参数 θ 分别发生变化时, 投资者采取不同的投资策略以及相应竞争比的变化情况。对于租赁设备的每期租金以及购买价格, 相对容易确定。对于危险率参数 θ 的估计, 由于每

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

个承租人一般都是持续租赁到只购买该设备时决策活动结束，因此参数 θ 的估计可运用概率统计中极大似然法进行估计。参数 θ 的抽样样本可参照其他承租人的租期数或由专家组根据各自拥有的信息给出租期数。本文采用计算机模拟专家打分给出决策参数 θ 的样本量，然后运用极大似然法进行估计。我们发现不同的专家组将显著地导致出不同的投资策略，下面分别给予说明。

图 1 中两条曲线表示，当投资者对每阶段继续租用的危险率 θ 的大小估计恒为 0.94（用计算机模拟 20 位专家根据各自拥有的信息分别给出了最优的投资策略：22, 20, 14, 11, 6, 26, 29, 22, 4, 14, 24, 25, 20, 11, 20, 0, 28, 10, 13, 14），市场利率 i 分别为 0.01 和 0.008 时，不同策略下竞争比的变化情况。参数大小满足关系式 $1/(1-\theta) < \Delta/(1+i)$，也就是说投资者采取总是租赁的平均成本小于相对机会成本倒数的折现值，最优的投资策略是采取永远租赁，即竞争比曲线单调下降。我们还发现当市场利率较大时，竞争比较小，这说明市场利率对于投资决策有着重要的影响。当货币的时间价值越大，投资者将会采取更加理性的、谨慎的投资策略。因此市场利率的存在降低了决策的不确定性。另外，从每条曲线可以看出：当 k 从零到无穷时，竞争比先迅速降低，之后趋于平缓。如当投资者采取策略 $A(50)$ 与策略 $A(\infty)$ 时，其竞争比相差不大。这说明了在实际投资中，存在着行行色色的大众投资者，有的永远租用下去，有的先租用一段时间才可能采取购买策略，并且竞争比不会发生太大的变化。从理论上讲，最优的策略应是竞争比达到最小时所对应的策略。

类似地，图 2 的结论也属于定理 1 中的第(1)种情形。当市场利率 $i=0.008$，危险率 θ 分别为 0.86（用计算机模拟另外 20 位专家根据各自拥有的信息分别给出了最优的投资策略：20, 3, 12, 0, 1, 0, 11, 4, 3, 7, 21, 4, 13, 12, 6, 2, 2, 5, 11, 6）和 0.94 时，分别得到了不同策略所对应的竞争比大小的变化情况。从图中可以看出：能否合理估计危险率 θ，对于最优策略的选取及竞争比的大小有着显著的影响。

在图 3 和图 4 中，参数大小满足关系式 $1/(1-\theta) > \Delta/(1+i)$，也就是说投资者采取总是租赁的平均成本大于相对机会成本倒数的折现值，最优的投资策略是租用一段时间再购买。图 3 表明市场利率越大，投资者将更加采取稳健谨慎的投资策略，从而使得竞争比越小，同时导致最优购买时间相应推迟，图 4 表示当市场利率保持不变时，危险率 θ 的不同估计对于竞争比的大小有着显著的影响（同图 2 类似）。因此，投资者能否做出较为合理的决策，关键在于对每阶段继续租用的危险率 θ 的准确估计。

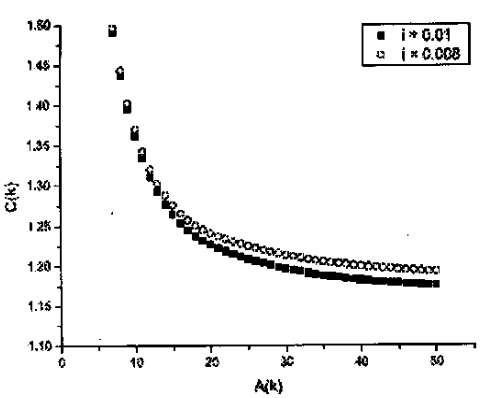

图 1　当 $1/(1-\theta) < \Delta/(1+i)$ 时，利率 i 变化分析

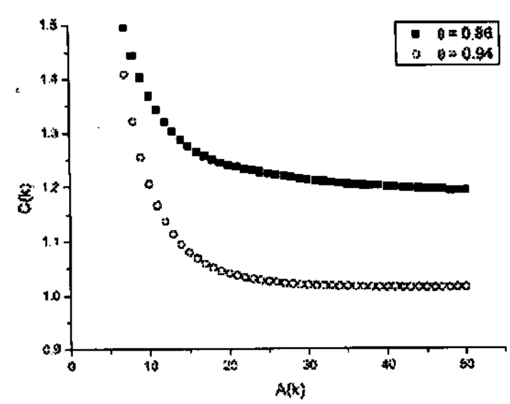

图 2　当 $1/(1-\theta) < \Delta/(1+i)$ 时，参数 θ 变化分析

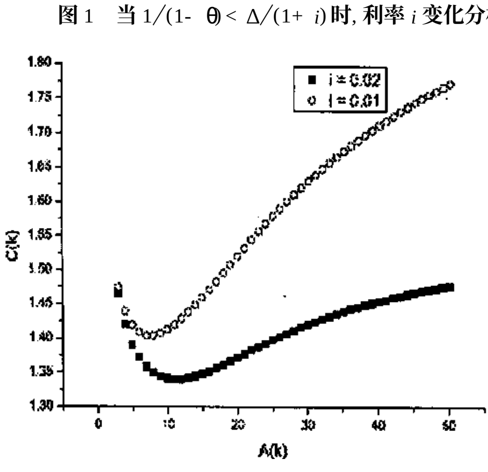

图 3　当 $1/(1-\theta) > \Delta/(1+i)$ 时，利率 i 变化分析

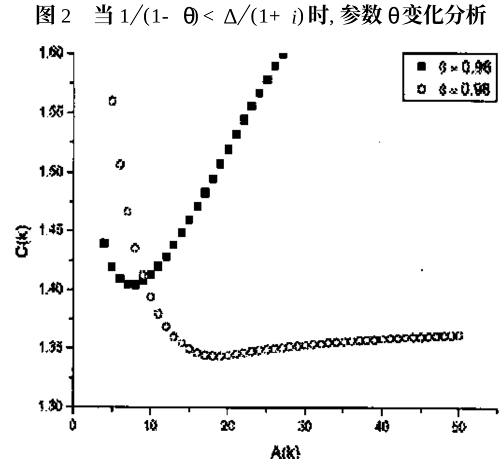

图 4　当 $1/(1-\theta) > \Delta/(1+i)$ 时，参数 θ 变化分析

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

在传统金融租赁决策中, 常见的决策方法是简单易行的成本分析法, 即将租赁成本与购买成本加以比较, 成本降低的方案为最佳方案, 这正是本文所涉及的事后最优离线策略。而对于占线决策问题, 由于未来需求的完全不确定性, 不可能运用传统的成本分析法进行投资决策, 因此巧妙设计占线策略为决策者提供了一种新的投资理念和启示。

5 结束语

当投资者从事一项具体的租赁活动时, 若对未来信息一无所知, 或者仅有租赁上界等很微的信息时, 也可以采用均匀分布等做类似本文的分析, 实质上均匀分布是一种无信息分布。由于现实中大量存在具有类似几何分布特征的占线问题, 我们可以运用纯竞争分析方法并结合未来信息分布特征改善竞争比性能分析, 使我们的分析结果更符合于实际问题。另外, 本文研究的占线租赁问题还有以下几个方面可值得进一步深入研究:

(1) 本文研究是假定占线承租人在连续时期内使用该设备, 如何研究存在折现因子情形下占线承租人有间断地使用该设备。

(2) 价格的不确实性。在本文模型中假定租用成本和购买成本是某一固定常数, 实事上在一个金融模型中, 价格的不确定性是一个值得考虑的重要因素。

(3) 扩展本文的模型到一类具有租赁合同的更为广泛情形, 如租赁协议给予承租人在合同期满以某一固定价格买下该租赁设备的权利, 在合同有效期间租赁活动不可取消, 以及具体不可取消期后可允许在任何时刻取消的合同。

(4) 可考虑一些其它相关经济因素, 如通货膨胀、税收、冗余成本等因素。

参考文献:

[1] Fiat A, Woeginger G J. Online algorithms: the state of art[M]. Springer, 1998: 368～370.

[2] Karp R. On-line algorithms versus off-line algorithms: how much is it worth to know the future? [A]. Proc. IFIP 12th World computer Congress[C], 1992, 1: 416～429.

[3] Karlin A R, Manaees M S, McGeogh L, Owichi S. Competitive randomize algorithms for non-uniform problems [J]. Algorithmica, 1994, 11(6): 542～571.

[4] El-Yaniv R, Kaniel R, Linial N. Competitive optimal on-line leasing[J]. Algorithmica, 1999, 25: 116～140.

[5] Al-Binali S. A risk-reward framework for the competitive analysis of financial games[J]. Algorithmica, 1999, 25: 99～115.

[6] Irani S, Ramanathan D. The problem of renting versus buying[R]. Personal Communication, 1998.

[7] El-Yaniv R, Karp R M. Nearly optimal competitive online replacement policies[J]. Mathematics of Operations Research, 1997, 22: 814～839.

[8] Azar Y, Bartal Y, Feuerstein E, Fiat A, Leonardi S, Rosén A. On capital investment[J]. Algorithmica, 1999, 25: 22～36.

[9] Damaschke P. Nearly optimal strategies for special cases of on-line capital investment[J]. Theoretical Computer Science, 2003, 302: 35～44.

[10] Fujiwara H, Iwama K. Average-case competitive analyses for ski-rental problems[A]. Lecture Notes in Computer Science[C]. Heidelberg: Springer-Verlag, 2002, 2518: 476～488.

[11] Xu Y F, Xu W J. Competitive algorithms for on-ling leasing problem in probabilistic environments[A]. Lecture Notes in Computer Science[C]. Heidelberg: Springer-Verlag, 2004, 3174(2): 725～730.

[12] Schall L D. The lease-or-buy and asset acquisition decisions[J]. Journal of Finance, 1974, 29: 1203～1214.

[13] Moller M H, Upton C W. Leasing, buying and the cost of capital services[J]. Journal of Finance, 1976, 31: 761～786.

[14] Wei L L. Bayeseian procedure in time sequential sample plan of geometric distribution[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1999, 22(1): 54～70.

[15] Wei L L, Zhang W X. A class of bayesian stopping and decision rule of geometric distribution[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2003, 26(1): 181～185.

[16] Borodin A, El-Yaniv R. On-line computation and competitive analysis[M]. Cambridge University Press, 1998.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

An Competitive Analysis for On-line Leasing Strategy with Interest Rate

XU Yin-feng[1,2], XU Wei-jun[1], LU Zhi-jie[1]

(1. School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. The State Key Lab for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an 710049, China)

Abstract: For the on-line leasing problem, since its input structure has simply and favorably statistical property, we integrate probability distribution into pure competitive analysis to build the optimal decision-making model of on-line leasing with interest rate, although pure competitive analysis always avoids probability assumption. We also get optimal competitive strategies and their competitive ratios. Compared to the results of Karp and El-Yaniv, the introduction of information of future input structure leads to improve the performance measure of competitive analysis. Moreover, compared to the Fujiwara's results that discuss the continuous model without interest rate, we consider the discrete model with interest rate and obtain the accurate solution.

Key words: On-line Algorithm; Stochastic Competitive Ratio; Financial Leasing; Discrete Model; Competitive Analysis

附录 定理 1 的证明

当 $k=0$ 时, 即投资者选取策略 $A(0)$, 也就是说投资者在一开始就选择了购买, 显然在实际当中也是客观存在的一种投资策略, 其竞争比可达 $C(0)=s(1-\theta)(1-\beta)\sum_{t=1}^{n^*}\theta^{t-1}/(1-\beta^t)+\theta^{n^*}$, 这是一个有限项求和, 故是一个有限值, 并不是文献[12]所指出的当 $k\to\infty$ 时, $C(0)\to\infty$。另外, 由于我们研究离散型模型, 边界处的分析不同于文献[12]中连续型模型利用导函数性质较易处理, 而是逐个作差进行放大或放小证明。

对于第(1)种情形, 当 $k=0,1,2,\cdots,n^*$ 时, 首先证 $C(1)-C(0)<0$, 其次再证 $C(k+1)-C(k)<0(k=1,2,\cdots,n^*-2)$。令 $B(k)=C(k+1)-C(k)$, 显然 k 取值为 $1,2,\cdots,n^*-1$。再令 $Q(k)=B(k+1)-B(k)$, 显然 k 取值为 $1,2,\cdots,n^*-2$。可验证 $Q(k)>0$ 及 $B(n^*-1)<0$, 由此可知, $C(k)$ 在 $k=n^*$ 处取得最小值。当 $k=n^*+1,n^*+2,n^*+3,\cdots$ 时, 利用不等式的性质可证明 $C(k+1)-C(k)<0$ 成立。最后再验证 $C(n^*+1)-C(n^*)<0$, 因此 $C(k)$ 的最小值在 $k\to\infty$ 时取得, 故我们得到了情形(2)的结论。

对于第(2)种情形, 当 $k=0,1,2,\cdots,n^*-1$ 时, 首先证 $C(1)-C(0)<0$, 其次再证 $C(k+1)-C(k)<0(k=1,2,\cdots,n^*-2)$, 及 $C(n^*)-C(n^*-1)0$ 成立。当 $k=n^*+1,n^*+2,n^*+3,\cdots$ 时, 可验证 $C(k+1)-C(k)=0$ 及 $C(n^*+1)-C(n^*)=0$ 成立。故有 $C(0)>C(1)>\cdots>C(n^*-1)=C(n^*)=C(n^*+1)=C(n^*+2)=\cdots$ 成立, 我们得到了情形(2)的结论。这说明在第 n^*-1 期之后, 任意时刻购买设备, 所得到的竞争比都相同。但在实际投资当中, 投资者最优的购买决策应在第 n^*-1 期, 其竞争比将达到 $1+[\theta/(1+i)]^{n^*}$ 最优。

对于第(3)种情形, 证明思路与方法上与前两种情形相似, 当 $k=0,1,n^*-2,n^*-1,n^*,n^*+1,n^*+2,\cdots$ 时, 有 $C(0)>C(1)$ 及 $C(n^*-1)<C(n^*-1)<C(n^*)<C(n^*+1)<C(n^*+2)<\cdots$ 成立。在 $k=1,2,\cdots,n^*-1$ 上, 与情形(1)类似分析可证得 $Q(k)>0$, 故存在唯一的 k_0 使得 $C(k)$ 达到最小, 也即下列不等式组成立:

$$\begin{cases} C(k_0-1)-C(k_0)>0 \\ C(k_0)-C(k_0+1)<0 \end{cases}$$

由于这个不等式组关于 k_0 为非线性关系式, 故不易求出 k_0 的解析表达式。但是当投资者从事一项具体租赁活动时, 只要估计出危险率 θ的取值大小, i,s 和 n^* 相对容易确定, 关于 k_0 可通过下面的二分搜索算法在多项式时间内确定。

步 1 输入 $B(1),B(2),\cdots,B(n^*)$;

步 2 如果 $B(\lfloor\frac{n^*+1}{2}\rfloor+1)>0$, 则删除序列 $B(\lfloor\frac{n^*+1}{2}\rfloor+2)$, $B(\lfloor\frac{n^*+1}{2}\rfloor+3)$, $\cdots$, $B(s)$; 如果 $B(\lfloor\frac{n^*+1}{2}\rfloor+1)<0$, 则删除序列 $B(1)$, $B(2)$, $\cdots$, $B(\lfloor\frac{n^*+1}{2}\rfloor)$;

步 3 在剩余的序列中重复步 2, 直到余下两项为止。比较这两项绝对值的大小, 并且输出最小绝对值项的下标, 即得 k_0。

由算法设计与复杂性分析易知, 可在多项式时间 $O(\log n^*)$ 求出最优决策日期 k_0。与文献[7]、文献[10]相比较, 最优决策日期提前。

对第(4)种情形, 根据竞争比定义, 对 $C(k)$ 取极限得证, 当 $1/(1-\theta)\to\infty$ 时, 即投资者租赁的平均时间趋于无穷大, 采取任何策略 $A(k)$ 的最优竞争比为 $1/s(1-\beta)+[1-1/s(1-\beta)]\beta^k$, 则最优的策略是立即购买, 此时竞争比趋向于 1。

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net