第 24 卷第 5 期(总第 149 期) 系 统 工 程 Vol. 24, No. 5
2006 年 5 月 Systems Engineering May., 2006

文章编号: 1001-4098(2006)05-0101-04

具有交货期限的占线订单加工*

郑斐峰[1], 徐寅峰[1,2], 张 娥[3]

(1. 西安交通大学管理学院, 陕西 西安 710049;
2. 西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室, 陕西 西安 710049;
3. 上海财经大学 信息管理与工程学院, 上海 200433)

摘 要: 探讨一类占线订单加工问题, 具体分析当订单交货时间具有一定上限约束时的不可中断和可中断两种模型。对于不可中断模型, 证明先到先服务策略在两种不同交货期限约束时分别是最优策略与最优占线策略; 对于可中断模型, 提出了基于先到先服务原则的可中断策略, 并证明当交货期限小于 3 倍加工时间时该策略具有竞争比 3/2。

关键词: 订单加工; 占线策略; 竞争比; 确定性策略
中图分类号: O226 **文献标识码**: A

占线(on-line)订单加工问题目前已经有大量的研究文献[1-4]。其中, 以最大化完工收益为目标的分支也有许多理论成果, 其基本模型为: 订单加工长度相同、没有权重, 从而目标为最大化完工订单数量[5,6]。Goldman 等人讨论了不可中断模型。当订单交货时间没有约束时他们给出了确定性策略的竞争比下界 2, 并证明贪婪策略具有竞争比 2; 当所有订单的交货时间不小于 2 倍加工时间时, 他们证明了贪婪策略具有竞争比 3/2[5]。Chrobak 等人也分析了订单交货时间没有约束的情形。对于不可中断模型他们给出了竞争比为 5/3 的随机策略; 对于可中断模型设计了竞争比 3/2 的确定性策略, 并证明这是竞争比的下界[6]。

根据上述可以看出, 当订单交货时间没有约束或者有一定下限时已有较好的研究结果。考虑在实际生产中, 每一个加工订单都应有明确的最长交货时间限制, 以保障订单需求者的利益。因此, 本文将对占线订单加工问题中订单交货时间具有一定约束时的基本模型进行探讨。具体地, 将分别讨论不可中断与可中断两种情形, 设计竞争策略并分析其竞争比。

1 问题描述与基本定义

在占线订单加工问题中, 每个订单 J_i 有四个要素 $a(J_i), p(J_i), d(J_i), w(J_i)$, 分别表示订单的到达时间、交货期限、加工长度和完工收益。其中, $d(J_i) \geq a(J_i) + p(J_i)$。本文将探讨订单加工长度相同、没有权重的这一基本模型, 不妨设 $p(J_i) = 1$ 且 $w(J_i) = 1$。因此, 模型的目标是最大化完工订单数量。本文将根据占线策略是否具有中断功能分两种情形讨论。“中断功能”是指策略具有中途停止被加工订单的性能。若要重新启动被中断了的订单就要从头加工。

对于任一确定性占线策略 A, 通常利用“竞争比”来衡量它的执行性能[7]。考虑任一订单输入序列 σ, 记 A 完成的订单数量为 $|\sigma|$, 离线最优策略 OPT 完成的订单数量为 $|\sigma^*|$, 如果 $\sup_{\sigma} \frac{|\sigma^*|}{|\sigma|} \leq c$ 成立, 则称 A 具有竞争比 c。这里, “确定性策略”是指策略每次以 1 的概率采取某种行动。由于 OPT 是离线策略, 可以认为它所启动订单都被完成, 因为如果它中断某个订单, 则此前它不启动该订单而保持空闲状态, 收益保持不变。

2 不可中断模型

当没有交货时间要求时, Goldman 给出了不可中断策略的竞争比下界为 2。下面将进一步讨论, 如果交货期限具有某些上限约束时该模型有什么性质。

定理 1 在不可中断模型中, 若 $\forall J_i$ 订单满足 $d(J_i)$

* **收稿日期**: 2006-03-07
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371094; 70471035); 优秀创新群体项目(70121001)
作者简介: 郑斐峰, 男, 福建三明人, 西安交通大学管理学院博士研究生, 研究方向: 占线排序管理问题的竞争策略设计与分析; 徐寅峰, 男, 吉林人, 西安交通大学管理学院教授, 博士生导师, 研究方向: 组合最优化等。

$\le a(J_i)+2$, 则存在最优策略。

证明 定理 1 等价于证明存在某个占线策略具有竞争比为 1。下面将证明先到先服务策略(简称 $FCFS$)具有竞争比 1。

$FCFS$ 策略描述如下: 当它处于空闲状态时总是启动首先到达的订单, 若有多个订单同时到达则按交货期限最早原则(简称 EDF)选择加工订单。在不可中断模型中, $FCFS$ 不中断它启动的任何订单。

下面分析 $FCFS$ 的竞争比。考虑由 $FCFS$ 生成的任一加工序列 δ, 记 $FCFS$ 完成订单数量为 $|\delta|$。再分析 OPT 在 δ 中完成的订单数量。记 $FCFS$ 加工订单 $J_i\in\delta$ 的启动时间为 $s^f(J_i)$。由于 $p(J_i)=1$, 当 $FCFS$ 在加工 J_i 时 OPT 最多启动一个订单, 记为 O_i, 并记 OPT 启动它的时间为 $s^o(O_i)$。由 O_i 的定义知 $s^o(O_i)\ge s^f(J_i)$。O_i 与 J_i 可能相同或者不同。如果二者相同, 则 $FSFC$ 完成该订单的时间不晚于 OPT. 如果二者不同, 则以下两个条件之一必须成立: ①$s^o(O_i)>s^f(J_i)$; ②$d(J_i)\le d(O_i)$。如果满足条件①, 结合 $s^f(J_i)\ge a(J_i)$ 及 $d(J_i)\le a(J_i)+2$, 有 $d(J_i)\le s^f(J_i)+2<s^o(O_i)+2$ 成立。则 OPT 完成 O_i 之后必定来不及完成 J_i。如果满足条件②, 结合 $s^o(O_i)\ge s^f(J_i)$, 若 OPT 完成 O_i 之后还能完成 J_i, 则 $FCFS$ 完成 J_i 之后一定也可完成 O_i。基于以上对 O_i 与 J_i 的关系分析, 当 OPT 启动一个订单时 $FCFS$ 一定正在加工某个订单 J, 且当 $FCFS$ 在加工 J 时 OPT 最多启动一个订单。因此, OPT 在 δ 中完成订单数量不超过 $|\delta|$。根据竞争比定义, $FCFS$ 的竞争比为 1。证毕。

定理 2 在不可中断模型中, 若 $\exists J_i$ 订单满足 $d(J_i)>a(J_i)+2$, 则任何确定性占线策略的竞争比不可能小于 2。

证明 根据定理假设, 不妨设存在订单 J_i 满足 $d(J_i)=a(J_i)+2+\epsilon(0<\epsilon<1)$。该定理等价于证明存在一个订单输入序列, 使得任意确定性占线策略 A 完成的订单数量不超过 OPT 完成数量的一半。设计输入序列设计如下。订单 J_1 在零时刻到达, $a(J_1)=0$ 且 $d(J_1)=2+\epsilon$. A 只有两种选择: ①在零时刻启动 J_1; ②在 $t(t>0)$ 时刻启动 J_1。如果 A 选择①, 则 J_2 将在 ϵ 时刻到达, 且 $d(J_2)=1+\epsilon$. OPT 将先后完成 J_2 和 J_1, 而 A 只能完成 J_1; 如果 A 选择②, 则 $a(J_2)=1$ 且 $d(J_2)=2$。OPT 将先后完成 J_1 和 J_2, 而 A 完成 J_1 的时间为 $t+1>1$, 无法再完成 J_2。因此, 不论 A 如何选择, 它只能完成一个订单, 而 OPT 总能完成两个订单。定理得证。证毕。

定理 3 在不可中断模型中, 若 $\exists J_i$ 订单满足 $d(J_i)>a(J_i)+2$, 则 $FCFS$ 策略具有竞争比 2。

证明 由于每个订单加工长度均为 1, 在 $FCFS$ 加工 J_i 时 OPT 至多启动一个订单。若 J_i 具有足够长的交货期限, 则 OPT 可以在 $FCFS$ 之后完成它。因此, $FCFS$ 每完成一个订单 OPT 将最多完成两个订单。因此, $FCFS$ 具有竞争比 2。证毕。

根据定理 2、定理 3, 在不可中断模型中, 若存在订单 J_i 的交货期限满足 $d(J_i)>a(J_i)+2$, 则 $FCFS$ 是最优占线策略。

3 可中断模型

根据定理 2, 对于不可中断模型, 如果存在订单其交货期限超过 2 倍加工时间, 则确定性策略竞争比不小于 2。接下来将讨论, 如果策略具有中断性能, 当存在订单的交货期限大于 2 倍但小于 3 倍加工时间时, 占线策略能否突破竞争比 2。在可中断模型中交货期限表示为: $\exists J_i$, $d(J_i)\le a(J_i)+2+\epsilon(0<\epsilon<1)$。下面首先给出基于 $FCFS$ 的可中断策略(简称 $PFCFS$), 然后分析其竞争比。

设有一个"等待订单集合 I", 每个订单到达时先进入该集合。$PFCFS$ 从 I 中挑选加工订单。在任何时刻 t, 如果订单 $J\in I$ 因交货期限逼近, 无法等到 $PFCFS$ 完成当前加工后再进行服务, 则称 J 为"紧急订单"。此时, 若 J 不被立即启动, 则将其从 I 中删除; 相应地, 保留在 I 中的订单均称为"候选订单"。I 不包括正在被 $PFCFS$ 加工的订单。

$PFCFS$ 策略描述如下: 它启动到达 I 中的第一个订单。当它完成一个订单后就从 I 中按 EDF 原则选择下一个加工订单。若 $I=\varnothing$, 则 $PFCFS$ 进入空闲状态。在加工过程中, 若 I 中到达一个新订单, $PFCFS$ 立即判断是否中断当前加工。基于当前所有订单, 如果中断操作可以使 $PFCFS$ 完成更多订单, 则中断当前加工并启动新订单。被中断订单则进入集合 I; 否则, 继续当前加工。

令 $\sigma=(J_1,\cdots,J_m)$ 表示由 $PFCFS$ 生成的任一加工序列, 订单 $J_i(1\le i\le m)$ 按 $PFCFS$ 启动它的时间先后排列。J_i 可能被中断或被完成。在 σ 的前后 $PFCFS$ 均处于空闲状态。令 $|\sigma|$ 表示 $PFCFS$ 完成的订单数量, 令 $|\sigma^*|$ 表示 OPT 相应的订单完成数量。根据竞争比定义, 若 $\frac{|\sigma^*|}{|\sigma|}\le c$, 则 $PFCFS$ 具有竞争比 c. 记 $PFCFS$ 加工 J_i 的启动时间为 $s^p(J_i)$, O_i 与定理 1 中的定义相同, 则 $s^o(O_i)\ge s^p(J_i)$。首先给出几个引理。

引理 1 在 $PFCFS$ 生成的加工序列 σ 中, 若 J_i 被 J_{i+1} 中断, 则 J_{i+1} 到达时 $I=\varnothing$.

证明 反证法。假设 J_{i+1} 到达时存在一个候选订单 $R\in I$. 如果不中断 J_i 可以完成 J_i 和 R. 则中断 J_i 必须能够完成 3 个订单。这意味着其中一个订单在 $a(J_{i+1})$ 之前到达, 并且在 $a(J_{i+1})+2$ 时刻还能被启动并完成。但是, 由模型假设 $d(J_i)\le a(J_i)+2+\epsilon$ 知, 任一订单的最长等待时间为 $1+\epsilon<2$。因此, 假设不成立。引理得证。证毕。

引理 2 在 $PFCFS$ 生成的加工序列 σ 中, 若 J_i 被中断, 则在 $a(J_{i+1})$ 时刻 J_{i+1} 是紧急订单而 J_i 不是紧急订单;

同时, 在 $(a(J_i), a(J_{i+1}))$ 期间没有订单到达。

证明　首先, 根据引理 1, 在 $a(J_{i+1})$ 时刻系统只有 J_i 与 J_{i+1} 两个订单。如果 J_{i+1} 不是紧急订单, 则 $PFCFS$ 不需中断即可以完成两个订单; 而如果 J_i 是紧急订单, 则中断操作并不能增加订单完成数量。因此, 在 $a(J_{i+1})$ 时刻 J_{i+1} 是紧急订单, 而 J_i 不是紧急订单。其次, 假设 $(a(J_i), a(J_{i+1}))$ 期间有订单 R 到达。结合引理 1 可以推断 R 为紧急订单, 否则 J_{i+1} 到达时 $I=\{R\}$。而在 $a(R)$ 时刻 J_i 不是紧急订单, 则 R 到来时肯定中断 J_i, 这与 J_{i+1} 中断 J_i 相矛盾。因此, $(a(J_i), a(J_{i+1}))$ 期间没有订单到达。证毕。

引理 3　在 $PFCFS$ 生成的服务序列 σ 中, 若 J_i 被中断, 则 J_{i+1} 与 J_{i+2} 一定是被完成订单。

证明　由引理 2 知, 如果 J_i 被中断, 则在 $a(J_{i+1})$ 时刻 J_{i+1} 是紧急订单, 而 J_i 不是紧急订单。J_{i+1} 由于是紧急订单而不会被中断。再根据引理 1 的分析, 每个订单最长等待时间为 $1+\epsilon$ 因此, 完成 J_{i+1} 之后 J_i 成为紧急订单并且是 J_{i+2} 的一个候选。由于 $PFCFS$ 按 EDF 原则选择加工订单, 则 J_{i+2} 启动时必定是一个紧急订单, 从而不会被中断。证毕。

基于以上 3 个引理, 对于 $PFCFS$ 策略有如下定理成立。

定理 4　在可中断模型中, 若 $\forall J_i$ 订单满足 $d(J_i) \le a(J_i) + 2 + \epsilon (0 < \epsilon < 1)$, 则 $PFCFS$ 具有竞争比 3/2。

证明　不妨设在 $\sigma = (J_1, J_2, \cdots, J_m)$ 中 $PFCFS$ 中断了 s 个订单, 则完成的订单数量为 $|\sigma| = m - s$ 由于在 σ 之后 $PFCFS$ 处于空闲状态, J_m 一定是被完成订单。下面分析 $|\sigma^*|$ 的大小。

首先判定在 $PFCFS$ 完成 J_m 之后 OPT 不可能启动 σ 中的订单。因为 $d(J_i) \le a(J_i) + 2 + \epsilon < a(J_i) + 3$, 所以 OPT 在 σ 之后不可能启动 $J_i (1 \le i \le m-1)$ 的加工。对于 J_m, 假设 OPT 在 σ 之后可以完成 J_m, 且在 $[s^p(J_m), s^p(J_m)+1)$ 期间 OPT 启动订单 O_m. 则 J_m 必须满足 $d(J_m) \ge s^o(O_m) + 2$。而且, O_m 到达时必须是紧急订单, 否则, 在 J_m 之后 $PFCFS$ 将启动 O_m 而不是进入空闲状态。但是, 若 O_m 是紧急订单, 结合 $d(J_m) \ge s^o(O_m) + 2$, O_m 到达时必定中断 J_m, 这与 J_m 被完成相矛盾。因此, OPT 在 σ 之后启动 J_m 和存在 O_m 不能同时成立。若前者成立, 则 O_m 不存在。此时, 不妨令 $O_m = J_m$, 即 OPT 在 σ 结束之前启动 J_m 而不是保持空闲状态。综上所述, 在 σ 之后 OPT 不可能启动 σ 中的订单。

由上述分析知 $|\sigma^*| \le m$. 下面将分析得出, 对于一部分被中断订单 J_i, O_i 不可能存在。首先, 若 σ 中没有中断订单, 即 $s=0$, 则 $|\sigma| = m \ge |\sigma^*|$。下面分析 $s \ge 1$ 的情形。

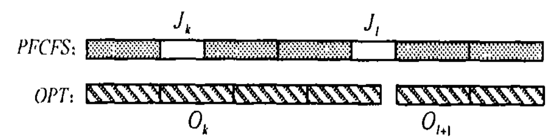

图 1　相邻的两个中断订单加工示意图

由引理 3 知, 在 σ 中每 3 个相邻订单至多有 1 个被中断, 因而 $s \le \lfloor m/3 \rfloor$。设在 σ 中任意两个相邻的被中断订单为 J_k 与 $J_l (k \le l-3)$, 如图 1 所示。分两种情况讨论: ① O_k 存在。根据引理 2 第二个结论有 $s^o(O_k) = s^p(J_k)$。结合 $s^p(J_{k+1}) < s^p(J_k) + 1$, 则 $s^o(O_i) > s^p(J_i)$ 对于 $k < i \le l-1$ 严格成立。当 $PFCFS$ 启动 J_l 时 OPT 还未完成 O_{l-1}。结合引理 2 及 $s^p(J_{l+1}) < s^p(J_l) + 1$ 知 O_l 不存在。② O_k 不存在。根据情况①的分析知, 若 O_l 存在必定导致 $PFCFS$ 在加工 O_l 之后相邻的那个被中断订单时 OPT 不可能启动任何订单。由上述两种情况可知, 当 $PFCFS$ 在加工 s 个被中断订单时 OPT 无法启动的订单数量(即相应的 O_l 不存在) 至少为 $\lfloor s/2 \rfloor$。所以, $|\sigma^*| \le m - \lfloor s/2 \rfloor$。结合 $s \le \lfloor m/3 \rfloor$,

$$\frac{|\sigma^*|}{|\sigma|} \le \frac{m - \lfloor s/2 \rfloor}{m - s} \le \frac{m - \lfloor m/6 \rfloor}{m - \lfloor m/3 \rfloor} \quad (1)$$

结合 $s \le \lfloor m/3 \rfloor$ 与 $s \ge 1$, 可以判定 $m \ge 3$。可以验证, 当 $3 \le m \le 5$ 时 (1) 式在 $m=3$ 时达到最大值 3/2。当 $m \ge 6$ 时化简 (1) 式如下:

$$\frac{m - \lfloor m/6 \rfloor}{m - \lfloor m/3 \rfloor} \le \frac{m - (m/6 - 1)}{m - m/3} = \frac{5}{4} + \frac{3}{2m} \le \frac{3}{2}$$

因此, $PFCFS$ 具有竞争比 3/2。证毕。

4　结论

本文分析了订单交货时间具有一定上限约束时的一类占线订单加工问题, 并分别讨论了不可中断和可中断两种模型。对于前一种模型证明了 $FCFS$ 策略在交货期限不超过 2 倍加工时间时是最优策略, 而当存在订单交货期限大于 2 倍加工时间时它具有竞争比 2, 达到了竞争比下界。对于可中断模型, 本文提出了 $PFCFS$ 策略, 证明当交货期限小于 3 倍加工时间时该策略具有竞争比 3/2, 与文 [6] 中交货时间没有约束时的策略竞争比相同。由于占线模型与实际生产情形比较吻合, 因此, 本文所得出的结论在理论上可以指导实际生产中的订单加工管理。

参考文献:

[1]　Baptiste P. Polynomial time algorithms for minimizing the weighted number of late jobs on a single machine with equal processing time[J]. Journal of Scheduling, 1999, 2: 245～252

[2] Hoogeveen H, Potts C N, Woeginger G J. On-line scheduling on a single machine: maximizing the number of early jobs[J]. Operations Research Letters, 2000, 27: 193~196.

[3] 李荣珩, 邓汉元. 单台机订单排序的在线与半在线算法[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2001, 24(1): 9~11.

[4] 唐国春, 张峰, 罗守成, 刘丽丽. 现代排序论[J]. 上海: 上海科学普及出版社, 2003: 33~39.

[5] Goldman S A, Parwatikar J, Suri S. On-line scheduling with hard deadlines[J]. Journal of Algorithms, 2000, 34: 370~389.

[6] Chrobak M, Jawor W, Sgall J, Tichy T. Online scheduling of equal-length jobs: randomization and restarts help[A]. 31st International Colloquium on Automata Languages and Programming[C]. LNCS, 2004, 3142: 358~370.

[7] Borodin A, El-yaniv R. Online computation and competitive analysis[Z]. Cambridge University Press, 1998: 12~13.

On-line Order Scheduling Problem with Due Date

ZHENG Fei-feng[1], XU Yin-feng[1,2], ZHANG E[3]

(1. School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. The State Key Lab for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an 710049, China;

3. Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China)

Abstract: This paper investigates the on-line order scheduling problem considering due date. For non-preemptive model, we prove that when each order has a due date at most two times of its processing time, the FCFS strategy is optimal. Otherwise FCFS has a competitive ratio equal 2, which meets the lower bound for deterministic strategies in that case. For preemptive-restart model, we present a deterministic strategy called PFCFS, and also prove that it has a competitive ratio equal 3/2 when the due date of each order is strictly less than 3 times of the order's processing time.

Key words: Order Processing; On-line Strategy; Competitive Ratio; Deterministic Strategy