

文章编号:1005-2542(2007)04-0417-05

贪婪策略在占线订单加工问题中的竞争分析

郑斐峰¹, 徐寅峰^{1,2}

(1. 西安交通大学 管理学院, 西安 710049;

2. 西安交通大学 机械制造系统工程国家重点实验室, 西安 710049)

【摘要】根据实际生产中订单收益随加工长度变化的一般规律,建立了占线订单加工模型,构建一种贪婪策略并分析它在本模型中的竞争性能。具体证明它在中断订单有、无惩罚两种情形下的竞争比,并讨论了模型中收益函数的参数对竞争比结果的影响。

关键词:贪婪策略; 占线问题; 订单排序; 竞争比

中图分类号: O 226 **文献标识码:** A

Competitive Analysis of Greedy Strategy in Online Order Scheduling Problem

ZHENG Fei-feng¹, XU Yin-feng^{1,2}

(1. School of Management, Xi'an Jiaotong Univ., Xi'an 710049, China;

2. State Key Lab. for Manufacturing Systems Eng., Xi'an Jiaotong Univ., Xi'an 710049, China)

【Abstract】The greedy strategy performs well in various kinds of practical applications. In this paper we set up an online order scheduling model, which reflects the general variation rule between order length and revenue in practice. Then a greedy strategy is put forward and proved to be competitive in two different situations with or without the abortion penalty. Finally, discuss the influence of the parameters of the revenue function in the greedy's competitive ratios.

Key words: greedy strategy; online problem; order scheduling; competitive ratio

占线订单加工问题是对现实生产中的订单排序问题从占线角度进行刻画。占线模型中的最大特征是订单逐个动态到达,相应信息只有在各个订单到达后才能知道,如何安排订单加工顺序使得在一段时间内获得的总收益最大。在占线订单加工问题中,许多学者对贪婪策略的执行性能进行了详细分析。所谓的“贪婪”其实是一种策略设计思想,其核心是在已知当前信息下选择使当前收益或潜在总体收益最大的操作。

贪婪策略应用十分普遍。例如,在加拿大旅行商^[1]、顶点覆盖^[2,3]、资源分配^[4]等问题中它都具有良好的执行性能。该策略主要有两个优点:要求存储空间少,而且与需求序列长度无关;操作简便,运算时间复杂性低^[5]。对于占线订单加工问题, Woeginger 研究了订单完工收益 $P(x)$ 与订单长度 x 满足以下 2 个条件的可中断-重启模型: $P(0) = 0$ 且当 $x > 0$ 时, $P(x) > 0$ 严格递增; 若 $0 < x < y$, 则

$$P(x) + P(y) \geq P(x - y) + P(y + x)$$

$P(x)$ 称为 G -收益函数。他证明了当订单均为紧交货期限时,贪婪策略具有竞争比 $\frac{1}{2}$, 并且达到了确定性策略的竞争比下界。Woeginger 还指出,若 $P(x) = x^a$ ($0 < a < 1$) 且 x 无上界约束时,不存在具有竞

收稿日期:2006-04-24

基金项目:国家自然科学基金资助项目(70525004, 70121001, 70471035)

作者简介:郑斐峰(1976-),男,博士生,讲师。研究方向为占线问题的竞争。

争性的确定性策略,说明此时贪婪策略不是竞争的^[6]。Goldwasser 分析了订单完工收益等于订单长度,而且每个订单交货期限至少为 $k+1$ ($k>0$) 倍订单长度的不可中断模型。当订单长度同一时,他证明了按交货期限先后顺序进行加工的贪婪策略具有竞争比 $1+1/(|k|+1)$;当订单只有两种长度选择时,他设计了 Greedy-Twolengths 策略并证明其竞争比^[7]为

$$1 + \max(|k| + 1)/|k|, (|k| + 1)/k$$

总之,在现有研究中有如下两点值得商榷:

研究模型中要么假设加工订单不能被中断,要么被中断操作没有带给加工商额外惩罚,即启动与中断订单没有任何风险。在实际中,订单应当可以被中断,而且订单被中断后如果不再加工它,则中断操作相当于订单违约,加工商往往要承担一定的惩罚;现有研究中的订单收益函数,没有贴切地刻画实际订单收益特征。实际生产中,产品单价通常具有两个特点:随订单长度,即产品定购数量的增加而减小,体现出“薄利多销”的思想;必定存在一个单价底线——单位成本或边际成本。一旦单价达到这个底线,不论产品定购数量如何增加,加工商都无法给予进一步的价格优惠。文献[6]假设的两种函数都不能反映以上两个单价特点。根据上述研究现状,本文给出单价具备以上2个特点的订单收益函

数,并讨论中断订单有、无惩罚两种情形。

1 问题建模与基本定义

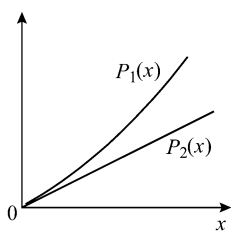
不妨将订单中单位长度的收益视为该订单的单价,而整个订单的完工收益等于订单长度与单价之积。具体地,本文假设长度为 x 的订单单价为:

$$f(x) = c_1 + \frac{c_2}{x+a} \quad 1 \leq x \leq k; \quad c_1, c_2, a > 0$$

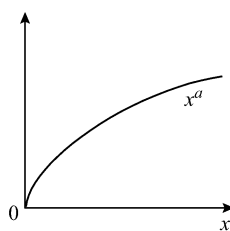
由 $f(x) < 0$ 表明,单价 $f(x)$ 与 x 成反比;由 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c_1$ 表明单价具有底线 c_1 ,即订单单位成本; $c_2/(x+a)$ 表示长度为 x 的订单的单位利润,它随 x 的增大而趋于零。由 $f(x)$ 可以得出,长度为 x 的订单其完工收益函数为

$$F(x) = f(x) \cdot x = c_1 x + \frac{c_2 x}{x+a}$$

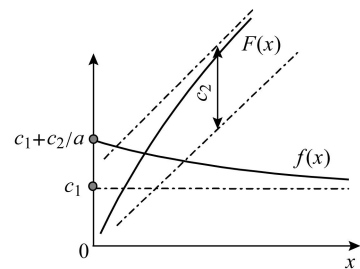
由 $F(x) > 0$ 表明,订单完工收益与 x 成正比;由 $F(x) < 0$ 表明, $F(x)$ 的递增速度逐渐减小。图1中直观地比较了文献[6]与本文的收益函数特征。图1(a)、(b)分别是文献[6]中的 C -收益函数和 $P(x) = x^a$ 函数的示意图。其中, $P_1(x)$ 与 $P_2(x)$ 为2种 C -收益函数,而图1(c)是 $f(x)$ 与 $F(x)$ 的示意图。观察图1可知, $F(x)$ 的变化趋势介于图1(a)、(b)两种函数之间,慢于 C -收益函数,但快于 x^a 函数。



(a) C-收益函数



(b) $P(x) = x^a$ ($0 < a < 1$) 函数



(c) 本文的 $F(x)$ 及 $f(x)$

图1 3种收益函数的示意图

令 $\alpha = x_{\max}/x_{\min}$ 。不妨设 x_{\min} 具有1个单位加工时间, x_{\max} 具有 α 单位加工时间,简单称 x 为1或 α 。对于订单 J_i ,它包含4个因素 $(a(J_i), p(J_i), d(J_i), w(J_i))$,分别表示订单的到达时间、长度、交货期限以及完工收益。一个订单如果截至交货期限还未被完成就失效了。模型的基本假设如下:

(1) 订单一个个动态到达,到达后加工商才获知该订单的4个因素。对于订单 J_i ,

$$d(J_i) \leq a(J_i) + p(J_i), \quad 1 \leq p(J_i)$$

(2) 加工商在每一时刻只能加工一个订单。订单可以被随时中断以及在它失效之前再次重新加

工,即考虑可中断-重启模型;

(3) 加工商完成 J_i 即可获得完工收益 $w(J_i)$ 。根据订单完工收益函数假设,有

$$w(J_i) = c_1 p(J_i) + \frac{c_2 p(J_i)}{p(J_i) + a}$$

考虑如下两种加工情形。中断订单没有惩罚。此时模型目标是最大化完工订单总收益;中断订单有惩罚。若 J_i 被中断后不再启动,则令加工商承担的惩罚数值为 $w(J_i)$,称为单倍惩罚。此时模型目标是最大化完工订单总收益与总惩罚两者之差。

对于任一确定性占线策略 A , 通常利用“竞争比”来衡量其执行性能^[8]。对于任意订单输入序列 $\{B_i\}$, 记 A 获得的订单总收益为 $|A|$, 离线最优策略 OPT 获得的订单总收益为 $|OPT|$, 如果

$$\sup\{|A|/|OPT|\} \leq c$$

成立, 则称 A 具有竞争比 c 。对于情形 (1), 所考察的总收益应为净收益。这里, “确定性策略”是指策略每次以 1 的概率采取某种行动, 它是相对于随机策略而言。由于 OPT 是离线策略, 可以认为它所启动订单都被完成, 因为如果它中断某个订单, 则此前它不启动该订单而保持空闲状态。

2 贪婪策略设计

针对订单完工收益函数 $F(x)$ 模型, 设计贪婪策略 (GR) 如下: 当 GR 正在加工某一个订单时, 如果新到一个订单具有加工长度至少为 β 倍当前订单, 则 GR 中断当前加工并启动新订单, 其中, β 是与收益函数参数 c_1, c_2 及 a 相关的一个待定系数, 也称为中断系数。

由于订单完工收益与订单长度具有成正比的函数关系, 因此, GR 策略通过考虑 2 个订单长度的相对大小来间接比较两者的完工收益。情形 (1) 中, 取值还受到中断惩罚的影响, 即在该情形中 GR 是否中断当前订单还需要考虑因中断所带来的惩罚值, 它影响着 GR 的最终净收益及其竞争性能。

情形 1 (中断无惩罚) 对于中断订单没有惩罚的情形, 有以下定理成立。

定理 1 若 $F(x)$ 与 x 满足:

$$F(x) = c_1 x + \frac{c_2 x}{x + a}$$

对于中断无惩罚情形 GR 策略具有竞争比 $Y + 2\sqrt{Y} + 2$, 其中

$$Y = 1 + \frac{c_2}{c_1(1 + a)}$$

证明 首先, 可以验证收益函数 $F(x)$ 满足 $F(kx) \geq kF(x) (k \geq 1)$ 。

考虑由 GR 生成的任意加工序列 $\{B_i\}$, 它可以分成多个子序列 $B = (B_1, B_2, \dots, B_w)$, 使得在任意子序列 $B = (J_1, J_2, \dots, J_m) (B = \cup_{i=1}^m J_i)$ 中, 只有最后一个订单 J_m 被 GR 完成而在它之前的 $m - 1$ 个订单均被中断。在 J_1 之前是另一个被完成订单或是一段空闲时间。令 $|B|, |J_i|$ 分别表示 GR 在 B, J_i 中获得的完工总收益; 相应地, 令 $|B^*|, |J_i^*|$ 分别表示当 GR 在服务 B, J_i 时最优策略 OPT 能够获得的完工总收益。根据上述对 B, J_i 的定义, 有

$$|B| = w(J_m) = F(p(J_m)), \quad |J_i| = \sum_{i=1}^w |B_i|$$

下面分析 $|B^*|$ 与 $|J_i^*|$ 的取值大小。根据 $F(kx) \geq kF(x) (k \geq 1)$ 以及 $1 \leq x$ 可以得出 $F(x) \geq xF(1)$, 即完成 x 个长度为 1 的 (最短) 订单比完成一个长度为 x 的订单收益更大。当 GR 在加工子序列 $B = (J_1, J_2, \dots, J_m)$ 中的某个订单 J_i 时, OPT 可以选择加工一个长订单或加工多个短订单。由前面的分析已知, $F(x) \geq xF(1)$, 因此, OPT 将选择加工多个长度为 1 的短订单; 根据子序列 B 的特点, 其前 $m - 1$ 个订单均被中断, 即对于 $1 \leq i \leq m - 1$, 有 $s(J_{i+1}) - s(J_i) < p(J_i)$ 成立。故有

$$e(J_m) - s(J_1) < \sum_{i=1}^m p(J_i)$$

这表明在 $[s(J_1), e(J_m)]$ 区间 OPT 最多只能启动 $e(J_m) - s(J_1) < \sum_{i=1}^m p(J_i)$ 个长度为 1 的最短订单。此外, 在 $e(J_m)$ 之前它还可以启动一个长订单。结合 GR 策略及 B 的定义知道, 该订单不能中断 J_m , 所以其长度必须严格小于 $p(J_m)$ 。综合起来, 在 $[s(J_1), e(J_m)]$ 区间内 OPT 所启动订单的完工总收益小于 $\sum_{i=1}^m p(J_i) F(1) + F(p(J_m))$ 。另外, 当 J_m 具有较长交货期限时, OPT 还可以在 B 之后启动并完成 J_m 。因此, $|B^*|$ 可以被界定如下:

$$\begin{aligned} |B^*| &< \sum_{i=1}^m p(J_i) F(1) + F(p(J_m)) + F(p(J_m)) \\ &= F(1) p(J_m) \frac{1}{-1} \left[1 - \left(\frac{1}{-1} \right)^m \right] + \\ &= (c_1 + 1) F(p(J_m)) < F(1) p(J_m) \frac{1}{-1} + \\ &= (c_1 + 1) F(p(J_m)) \end{aligned} \tag{1}$$

结合 $F(x)$, 得

$$\begin{aligned} \frac{|B^*|}{|B|} &< \frac{F(1) p(J_m) (1 / (-1)) + (c_1 + 1) F(p(J_m))}{F(p(J_m))} < \\ &= \frac{F(1)}{c_1(-1)} + (c_1 + 1) = \frac{1}{-1} Y + c_1 + 1 \end{aligned} \tag{2}$$

式中, 第 2 个不等式成立是因为

$$\lim_{p(J_m)} \frac{c_2}{p(J_m) + a} = 0$$

在最后 1 个等式中

$$Y = \frac{F(1)}{c_1} = 1 + \frac{c_2}{c_1(1 + a)}$$

令式 (2) 对 β 的一阶导数为零, 可得当 $\beta = \sqrt{Y} + 1$ 时, $|B^*|/|B|$ 达到最小值 $Y + 2\sqrt{Y} + 2$ 。结合 $|B| = \sum_{i=1}^w |B_i|$ 与 $|J_i^*| = \sum_{i=1}^w |B_i^*|$ 可知, $|J_i^*|/|J_i| < Y + 2$

$\sqrt{Y} + 2$ 在 $= \sqrt{Y+1} + 1$ 时亦成立。因此, GR 策略具有竞争比 $Y + 2\sqrt{Y} + 2$ 。证毕

情形 2(中断有惩罚) 对于中断订单具有惩罚的情形,有以下定理成立。

定理 2 若 $F(x)$ 与 x 满足 $F(x) = c_1 x + \frac{c_2 x}{x+a}$, 对于中断具有单倍惩罚情形 GR 策略具有竞争比 $3Y + 2 + 2\sqrt{2Y^2 + 3Y}$, 其中

$$Y = 1 + c_2 / [c_1(1+a)]$$

证明 情形 2 的分析思路同情形 1 基本相同, 即只需分析由 GR 生成的任一个子序列 B 即可。不同之处在于, 由于 GR 在 B 中总共中断了 $m - 1$ 次订单, 受到的总惩罚量等于被中断订单的完工收益之和, 即 $\sum_{i=1}^{m-1} p(J_i)$, 所以, 在情形 2 中

$$|B| = F(p(J_m)) - \sum_{i=1}^{m-1} p(J_i)$$

而 OPT 所获得的总收益依然满足式(1)。因此,

$$\frac{|B^*|}{|B|} < \frac{F(1)p(J_m) - \left[1 - \left(\frac{1}{m}\right)^m\right] + (m-1)F(p(J_m))}{F(p(J_m)) - \sum_{i=1}^{m-1} p(J_i)} \quad (3)$$

式中,

$$\sum_{i=1}^{m-1} F(p(J_i)) = \sum_{i=1}^{m-1} \left[\frac{c_1 p(J_m)}{m-i} + \frac{c_2 p(J_m) / (m-i)}{p(J_m) / (m-i) + a} \right] = \frac{p(J_m)}{m-1} \left[1 - \left(\frac{1}{m}\right)^{m-1} \right] \left[c_1 + \frac{c_2}{1+a} \right] \quad (4)$$

式中, 第 1 个不等式成立是根据 GR 的中断要求; 第 2 个不等式成立是因为结合假设(1)有 $p(J_m) / (m-i) > p(J_i)$ 成立。将式(3)中分子分母同除以 $c_1 p(J_m)$, 令 $t = c_2 / c_1$, 并结合

$$F(p(J_m)) = c_1 p(J_m) + \frac{c_2 p(J_m)}{p(J_m) + a}$$

和式(4), 得

$$\frac{|B^*|}{|B|} < \frac{\left(1 + \frac{t}{1+a}\right) - \left[1 - \left(\frac{1}{m}\right)^m\right] + (m-1)\left(\frac{t}{p(J_m) + a}\right)}{\left(1 + \frac{t}{p(J_m) + a}\right) - \frac{1}{m-1} \left[1 - \left(\frac{1}{m}\right)^{m-1}\right] \left(1 + \frac{t}{1+a}\right)} \quad (5)$$

可以验证, 式(5)中不等式右边是 $p(J_m)$ 与 m 这 2 个独立变量的增函数, 因此, 式(5)的最大值在 $p(J_m)$ 与 m 均趋于无穷大时达到。即, 式(5)转化为

$$\frac{|B^*|}{|B|} < \frac{1 + \frac{t}{1+a}}{1 - \frac{1}{m-1} \left(1 + \frac{t}{1+a}\right)} \quad (6)$$

首先, 在上式中需要保证 $|B| > 0$, 即 $Y > 2 + \frac{t}{1+a}$ 。

其次, 令上式的一阶导数为零, 可以得到当 $Y = Y + 1 + \sqrt{2Y^2 + 3Y}$ 时, $|B^*| / |B|$ 达到最小值 $3Y + 2 + 2\sqrt{2Y^2 + 3Y}$, 其中, $Y = 1 + \frac{c_2}{c_1(1+a)}$ 。可以验证, 不等式

$$Y + 1 + \sqrt{2Y^2 + 3Y} > 2 + \frac{t}{1+a}$$

成立, 即满足 $|B| > 0$ 。类似于定理 1 证明,

$$|B^*| / |B| < 3Y + 2 + 2\sqrt{2Y^2 + 3Y}$$

成立。因此, 定理成立。证毕

3 参数分析

从定理 1 与 2 中可以看出, 当收益与订单长度具有本文所描述的函数关系时, GR 的竞争比不是一个固定常数, 而是与收益函数的 3 个参数相关, 与 c_2 成正比, 与 c_1 、 a 成反比。同时, 在情形 2 中, GR 的竞争比与中断系数随 Y 值的递增速度的明显大于情形 1。图 2 显示了直观的比较。图中, 横坐标表示 $Y = F(1) / c_1$ 的取值; 纵坐标表示竞争比与中断系数的数值。2 种情形下的竞争比与 Y 存在差异, 主要是因为情形 2 相对于情形 1, 新启动订单必须具有更大的完工收益, 以弥补因中断带来的惩罚。

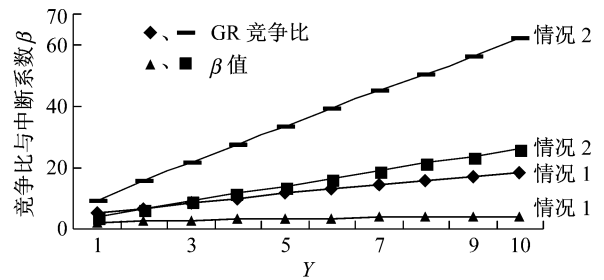


图 2 GR 竞争比与中断系数在 2 种情形下的对比示意图

由单价函数 $f(x)$ 知道, 当 c_1 与 c_2 一定时, a 越大, $f(x)$ 随订单长度的下降速度逐渐减缓。若 a 很大, 则 $f(x)$ 近似不变。此时 $Y \approx 1$, 在情形 1、2 中的竞争比分别达到最小值 $5, 5 + 2\sqrt{5}$; 若 $a = 0$, 则 $Y = 1 + c_2 / c_1$ 。此时, 竞争比决定于 c_2 / c_1 的大小。当 c_2 一定时, 竞争比与订单单位成本 c_1 成反比。总体来说, 竞争比与单价下降速度以及单位成本 c_1 成反比, 而与 c_2 成正比。

4 结语

本文主要工作体现在两个方面: 根据实际生产中订单收益与订单长度的内在关系建立了占线订

单加工模型。它既是对实际生产订单收益特征的贴切刻画,也是对现有研究的一种补充与丰富;鉴于贪婪策略在理论研究与实际应用中的普遍性,本文从理论角度分析了贪婪策略在中断订单有、无惩罚2种情形下分别具有的竞争性能,并进行了比较分析。本文工作对优化实际生产订单加工问题具有指导意义。当然,本文所讨论的贪婪策略不是直接从订单收益角度设计中断条件,而且不考虑订单的交货期限,能否结合这两个方面设计具有更优竞争性的策略还有待于进一步探究。此外,在分析竞争比时,实际上假设了,如果是一个有限数值时,相信贪婪策略的竞争性能会得到较大改善。

参考文献:

- [1] 朱志军,徐寅峰.加拿大旅行者问题[J].系统工程理论方法应用,2003,12(2):177-181.
- [2] Ausiello G, Giannakos A, Paschos V T. Greedy algorithms for on-line set-covering and related problems [C]// In Proc Twelfth Computing: The Australasian Theory Symposium (CATS2006). Hobart, Australia. CRPIT, 51. ACS. 2006: 145 - 151.
- [3] 杨杰.改进的最优顶点覆盖贪心边近似算法[J].计算机应用,2006,26(1):149-151.
- [4] 肖华勇,田铮,师义民.资源公平分配的一种贪婪算法[J].运筹与管理,2000,9(2):37-42.
- [5] Thomas H C, Charles E L, Ronald L R, *et al.* Introduction to algorithms[M]. The MIT Press, 2002: 370 - 399.
- [6] Woeginger G J. On-line scheduling of jobs with fixed start and end times[J]. Theoretical Computer Science, 1994, 130: 5 - 16.
- [7] Goldwasser M H. Patience is a virtue: The effect of slack on competitiveness for admission control [C]// Proc of the 10th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithm (SODA'99). 1999: 396 - 405.
- [8] Borodin A, El-yaniv R. Online computation and competitive analysis [M]. Cambridge University Press, 1998: 12 - 13.
- [7] Rafal Weron. Ingve simonsen and piotr wilman. modeling highly volatile and seasonal markers: evidence from the nord pool electricity market [EB/OL]. [2002-08]. <http://www.econpapers.hhs.se>.
- [8] Seel K C. Boom and bust cycles in power plant construction - A simulation study of the temporal and geographical aspects of the Alberta competitive electrical industry[D]. Calgary:the University of Calgary, 2004.
- [9] 黄健柏,黄向宇,邵留国,等.基于系统动力学的峰谷分时电价模型与仿真:(一)模型的建立[J].电力系统自动化,2006,30(11):18-23.
- [10] 黄健柏,黄向宇,邵留国,等.基于系统动力学的峰谷分时电价模型与仿真:(二)仿真结构及其分析[J].电力系统自动化,2006,30(12):1-5.
- [11] 邵留国,黄健柏,扶缚龙.两部制电价对发电容量投资引导作用的SD分析[C]//第五届中国经济学年会会议论文,厦门:厦门大学,2005.
- [12] Sterman J Business Dynamics. System thinking and modelling for a complex world[M]. New York:Irwin Mc Graw-Hill, 2000.
- [13] 王勇,钟志勇,文福拴,等.发电装机容量市场适当价格水平的确定[J].电力系统自动化,2005,29(9):5-10.
- [14] 臧宝锋,胡汉辉,王建兴,等.电力市场条件下的发电投资均衡[J].电力系统自动化,2005,30(2):41-44.

(上接第416页)