文章编号:1001-4098(2006)08-0098-04

占线中心选址问题竞争比的下界*

代文强[1], 徐寅峰[1,2], 李毅学[1]

(1. 西安交通大学 管理学院, 陕西 西安　710049;
2. 西安交通大学 机械制造系统工程国家重点实验室, 陕西 西安　710049)

摘　要: 对占线中心选址问题的竞争比进行了研究。对度量空间占线中心选址问题, 本文证明该问题的下界是 $2-\frac{n-\sqrt{n^2-3n+3}}{n-1}$, 其中 n 为空间点的个数, 该结果要优于已有的结果 $2-\frac{2}{n-1}$。对一般空间上的占线中心选址问题, 本文证明了竞争比的下界是 $\frac{(n-2)\Delta+\sqrt{(n-2)^2\Delta^2+4(n-2)}}{2(n-1)}$, 其中 Δ 是所给空间最大的相对距离, 并证明一般空间上的占线中心选址问题不存在常数竞争算法。

关键词: 运筹学; 选址问题; 占线中心; 竞争比
中图分类号: O 221　　　**文献标识码**: A

1　引言

离散网络选址问题无论是对公共事业还是对私营公司的战略规划方面都有着非常重要而深远的影响。一般的, 网络上任意两点间的最短路长度被定义为该两点间的距离。如果网络上的某点到其余点的距离的最大值最小, 则该点被称为 center, 如果该点到其余点的距离之和最小, 该点被称为 median (中心)。在本文中我们主要研究 median 问题。如果问题是求在 n 个点的网络中寻求 k 个点, 使得这 k 个点到其余的点的距离之和最小, 这个问题就是著名的 k-中心 (k-median) 选址问题, 已经证明该问题是NP-hard 的[1,2]。

k-中心选址问题是一个很基本的选址模型, 实际中的选址问题或者本身就是一个 k-中心选址问题, 或者能将该问题作为一个子问题[3]。考虑到模型在计算上的复杂性, 实际中的处理方法常常是将之建立成一个静态的、决定性的数学模型。但是, 实际过程中的选址决策过程常常是一个长期的过程, 会受到诸多因素的影响。因此, 将选址决策模型建立成一个受相关不确定参数影响的动态选址模型更加符合实际。在一些研究文献中, 已经考虑的不确定因素有需求和费用等等[4]。

本文主要考虑如下的实际情形: 在全部需要建立的设施的个数不知道的前提下, 我们需要决定在哪里建立初始的设施(或设施集), 同时还要求, 当新的设施建立后, 前面已经建立的设施不能被删除。这是一个待选址个数不确定的选址问题。理论上, 由于最优的选址方案同选址的个数是紧密相关的, 不同的选址个数将决定不同的选址点, 因此我们只能考虑如何将实际的选址集费用同在同样的选址个数下最优的选址集费用尽量的靠近, 同时, 我们需要在建立了新的设施时, 不能删去现存的设施集。实际上, 上述约束就是考虑如何使得待修建的设施集在最坏情形下达到某种最优, 可以考虑用占线算法和竞争策略的相关理论来建立模型和进行研究。

Mettu 和 Plaxton 在2003年建立并研究了占线中心(online median)选址问题[5]。他们的模型的输出是一个待选址序列, 并保证序列的每一个 k 元前序的费用, 都同相应的 k-median 问题的最优解费用接近。具体的性能度量是用算法竞争比来度量的, 竞争比越小越好。自从该模型被提出后, 受到了越来越多的管理学家、运筹学家以及计算机学家的重视, 但是进一步的研究成果很少。在Mettu 和 Plaxton 的文章[5]中, m 他们证明了度量空间占线中心选址问题的竞争比下界是 $2-\frac{2}{n-1}$, 其中 n 是点的个数, 这是现在已知的最好的下界结果。本文将这个下界改进到

* 收稿日期: 2006-07-03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371094;70471035); 国家杰出青年基金资助项目(70525004); 博士点基金资助项目(20050698048)
作者简介: 代文强(1978-), 男, 四川彭州人, 西安交通大学管理学院博士研究生, 研究方向: 组合最优化与算法设计。

$2-\frac{n-\sqrt{n^2-3n+3}}{n-1}$。同时, 我们对一般空间的占线中心选址问题给出了一个竞争比下界, 并证明一般空间上的占线中心选址问题不存在常数竞争算法。

2　问题描述

度量空间占线中心选址问题(一般直接称为占线中心问题)可以数学描述如下:

给定一个点集 U 及定义在 U 上的非负的距离函数 $d: U\times U\rightarrow R^+$ 和一个正的权重函数 $w: U\rightarrow R^+$. 我们一般假设距离函数 d 是一个度量, 即 d 非负、对称和满足三角不定式, 以及 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$. 同时定义一个点 x 到一个点集 S 的距离是 $d(x,S)=\min_{y\in S}(x,y)$, 且 $|S|$ 表示点集 S 中的点的个数。记 $n=|U|$ 表示所有的顾客数目, 对任意子集 S, $S\subseteq U$, 定义其费用是 $cost(S)=\sum_{x\in U}d(x,S)w(x)$。占线中心选址问题的数学描述如下: 寻求子集序列 F_i, $i=1,2,\cdots,n$, 使得 $|F_i|=i$, $F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_n=U$, 且 $cost(F_i)\le c\cdot opt_i$, 其中 opt_i 是 i-median 问题的最优解费用, c 称为竞争比, c 越小越好。

下面用一个实际例子来说明占线中心选址问题的思路。考虑一个公司为了服务其顾客, 准备修建服务设施来满足顾客的需要, 这是一个经典的选址问题, 但是我们考虑如下的实际情形: 由于公司资本量的限制, 公司在现在只能修建很少的服务设施, 但是为了提高公司的服务水平, 公司准备在不久的将来扩展其服务设施。同时由于一些因素的影响, 以往修建的服务设施公司不能拆除, 因此公司的扩展计划实际上是一个待修建的服务设施个数不确定的设施修建序列问题。占线中心问题考虑的是这样的问题: 是否存在一个待修建的服务设施的序列使得, 对于该序列的任意 k 个前序(即取出序列的前面 k 个作为选定的修建设施)的费用, 与仅选择建造 k 个设施的最优费用(即我们已经确定只建造 k 个设施的最小费用)很靠近?对每一个 k, 考虑修建序列的前 k 个设施的费用与最优选择 k 个设施的费用的比值, 占线中心问题的目标就是选择一个设施的排序使得对于所有的 k, 得到的最大比值最小。如果对于所有的 k, 得到的比值都不大于 c, 我们就称我们的占线选址算法是竞争比是 c 的竞争算法, 同时 c 被称为占线选址算法的竞争比。

占线中心选址问题是一个非常困难的问题, 这体现在如下两点上: (1) 问题的离线形式是 k-中心(k-median)问题, 这是一个是非常困难的问题, 已经证明该问题是NP难的。(2) 我们同时需要确定 n 个待修建的设施的序列, 要求其满足 $F_i\subset F_{i+1}$.

3　占线中心问题竞争比下界

在Mettu 和 Plaxton 的文章[5]中, 针对占线中心选址问题, 他们证明了竞争比的下界是 $2-\frac{2}{n-1}$, 其中 n 是所给定空间的点的个数。我们下面将这个结论改进到 $2-\frac{n-\sqrt{n^2-3n+3}}{n-1}$。注意到由于

$$
\begin{aligned}
&2-\frac{n-\sqrt{n^2-3n+3}}{n-1}\\
&=\frac{n-2+\sqrt{n^2-3n+3}}{n-1}\\
&=\frac{n-2+\sqrt{\left(n-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}{n-1}\\
&>\frac{n-2+\sqrt{\left(n-\frac{3}{2}\right)^2}}{n-1}\\
&=2-\frac{\frac{3}{2}}{n-1}>2-\frac{2}{n-1}
\end{aligned}
$$

因此我们的结果比[5] 的结果 $2-\frac{2}{n-1}$ 要好。

定理1　占线中心问题竞争比的下界是 $2-\frac{n-\sqrt{n^2-3n+3}}{n-1}$, 其中 n 是给定度量空间 U 中点的个数, 即 $|U|=n$。

证明　我们考虑如下一个特殊的度量空间及费用函数(如图1所示), 在图1中, 空心的点记为 x_n, 其余实心的点记为 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$。空心点 x_n 的权重为1, 实心点 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ 的权重都是 w, $w\ge 1$, 具体数值以后确定。同时我们定义任意两个不同实心点间的距离是 $2-\epsilon$, 空心点到任意实心点的距离都是1, ϵ 充分小但同时使得定义的距离函数满足三角不等式。为了计算简单, 在下面的计算中我们就直接取任意两个实心点间的距离是2。

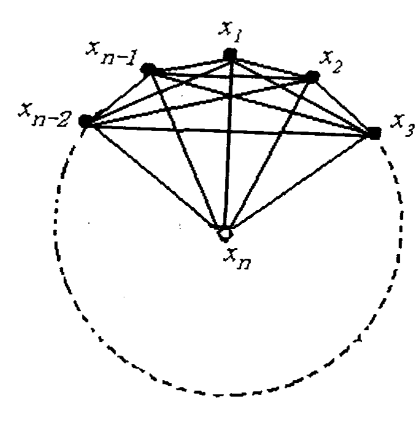

图1　占线中心选址问题竞争比下界证明的实例

对于任意的占线算法 A, 我们考虑如下的对手策略。如果占线算法 A 的第1位选择实心点, 根据对称性, 不妨假设占线算法 A 选择点 x_1, 则对选择 $k=1$, 此时最优算法 ALG_{opt} 选择空心点 x_n, 由于 $cost(\{x_1\})=2(n-2)w+1$, $cost$

$(\{x_n\}) = (n-1)w$，我们得到

$$\frac{cost(\{x_1\})}{cost(\{x_n\})} = \frac{2(n-2)w+1}{(n-1)w} = 2 - \frac{2-\frac{1}{w}}{n-1}$$

如果占线算法A 的第1位选择空心点x_n，则对手选择$k=n-1$，此时占线算法A 得到的解（根据对称性，可以假设）为$\{x_2, x_3, \cdots, x_n\}$，最优算法$ALG_{opt}$是选择点集$\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$，根据$cost(\{x_2, x_3, \cdots, x_n\}) = w$，$cost(\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}) = 1$，因此

$$\frac{cost(\{x_2, x_3, \cdots, x_n\})}{cost(\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\})} = w$$

故占线算法A 的竞争比的一个下界为

$$\min\left\{2 - \frac{2-\frac{1}{w}}{n-1}, w\right\}（注意 w \geq 1）$$

由于第一个函数$2-\frac{2-\frac{1}{w}}{n-1}$关于$w$ 为减函数，为了得到非平凡的下界，我们令

$$w = 2 - \frac{2-\frac{1}{w}}{n-1}$$

解得

$$w = 2 - \frac{n-\sqrt{n^2-3n+3}}{n-1}$$

因此我们得到，占线中心选址问题竞争比的下界是$2-\frac{n-\sqrt{n^2-3n+3}}{n-1}$。证毕。

4　一般空间上的占线中心选址问题竞争比的下界

一般空间上的占线中心选址问题同上面的度量空间的占线中心选址问题的唯一差别是不要求两点间定义的距离满足三角不等式。根据现实中的两点间的距离的实际含义，这在实际中是有一定现实意义的。我们要问的是，一般空间上的占线中心选址问题是否还存在常数竞争算法？

定义　对任意给定的选址问题，定义$\Delta = \frac{\max_{u,v\in U} d(u,v)}{\min_{u,v\in U, u\neq v} d(u,v)}$，即$\Delta$表示输入空间中最大的相对距离。

考虑到实际生活中的问题输入一定不是无限的，我们引入的上述输入空间中最大的相对距离Δ并不是一个强假设。在上述定义下，类似于定理1的证明，我们有下面的定理。

定理2　一般空间占线中心选址问题竞争比的下界是$\frac{(n-2)\Delta+\sqrt{(n-2)^2\Delta^2+4(n-1)}}{2(n-1)}$。

证明　类似于定理1的证明，我们考虑如图1所示的度量空间及费用函数。此时，空心点x_n的权重记为1，其余实心的点$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$的权重任记为$w$，$w \geq 1$。空心点到实心点的距离任记为1，任意两个不同实心点间的距离是输入空间中最大的相对距离Δ。

对于任意的占线算法A，类似于定理1的证明过程，我们根据占线算法A 的第1位选择实心点或者空心点的不同，考虑不同的对手策略，可以得到如下的一般空间的占线中心问题的竞争比下界为$\min\left\{\frac{n-2}{n-1}\Delta+\frac{1}{(n-1)w}, w\right\}$（注意$w \geq 1$）。同样的，由于第一个函数$\frac{n-2}{n-1}\Delta+\frac{1}{(n-1)w}$是关于$w$ 的减函数，令$w=\frac{n-2}{n-1}\Delta+\frac{1}{(n-1)w}$，解之，得到$w=\frac{(n-2)\Delta+\sqrt{(n-2)^2\Delta^2+4(n-1)}}{2(n-1)}$。证毕。

推论　一般空间占线中心选址问题不存在常数竞争比的竞争算法。

证明　我们首先化简定理2得到的竞争比的下界。

$$\frac{(n-2)\Delta+\sqrt{(n-2)^2\Delta^2+4(n-1)}}{2(n-1)}$$
$$= \frac{(n-2)\Delta+\sqrt{\Delta^2\left[\left(n-2-\frac{2}{\Delta^2}\right)^2-\frac{4}{\Delta^4}+\frac{4}{\Delta^2}\right]}}{2(n-1)}$$
$$> \frac{(n-2)\Delta+\sqrt{\Delta^2\left[\left(n-2-\frac{2}{\Delta^2}\right)^2\right]}}{2(n-1)}$$
$$= \frac{(n-2)\Delta-\frac{1}{\Delta}}{n-1}$$
$$= \Delta - \frac{\Delta+\frac{1}{\Delta}}{n-1}$$

即一般空间占线中心选址问题竞争比至少是$\Delta-\frac{\Delta+\frac{1}{\Delta}}{n-1}$。

我们现在证明结论，使用反证法。假设问题存在某个竞争比是常数K 的竞争算法，则我们构造一个一般网络，该网络的最大相对距离是$K+1$。则根据上述结论，该问题的竞争比下界大于

$$K+1-\frac{K+\frac{2}{K+1}}{n-1} = K+\left[1-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(K-1)(n-1)}\right] > K$$

两者矛盾，命题证毕。

5　结束语

本文分别针对度量空间和一般空间对占线中心选址问题的竞争比下界进行了研究。对于度量空间，我们证明了该问题的下界是$2-\frac{n-\sqrt{n^2-3n+3}}{n-1}$，其中$n$ 为空间点的个数，该结果改进了已有的结果$2-\frac{2}{n-1}$。对一般空间上的占线中心选址问题，本文也给出了一个竞争比的下界，该下界结果同所给空间相对距离的最大比值有关，本文同时证明一般空间上的占线中心选址问题不存在常数竞争算法。这些结论不仅对于理论上的问题的占线算法的设计

与分析, 还是对于实际中的选址决策, 都具有一定的指导意义。

参考文献:

[1] Garey M R, Johnson D S. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness [M]. San Francisco, CA: Freeman, 1979.

[2] Kariv O, Hakimi S L. An algorithm approach to network location problems, Part II: The p-medians [J]. SIAM J. Appl. Math, 1979, 37: 539～560.

[3] Drezner Z, Hamacher H. Facility location: application and theory [M]. Springer, 2002.

[4] Current J, Daskin M, Schilling D. Discrete network location models [A]. Drezner Z, Hamacher W. Facility location: applications and theory [C]. Springer, 2002: 81～118.

[5] Mettu R R, Plaxton C G. The online median problem [J]. SIAM Journal of Computing, 2003, 32(3): 816～832.

Lower Bound for the Competitive Ratio of Online Median Problem

DAI Wen-qiang[1], XU Yin-feng[1,2], LI Yi-xue[1]

(1. School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. State Key Lab for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an 710049, China)

Abstract: This paper studies the competitive ratio of online median problem. For the case being the metric space, we prove the lower bound is $2-\frac{n-\sqrt{n^2-3n+3}}{n-1}$, where n is the number of points in the space. This result is better than the existed result $2-\frac{2}{n-1}$. For the case being the common space, this paper proves the lower bound is $\frac{(n-2)\Delta+\sqrt{(n-2)^2\Delta^2+4(n-2)}}{2(n-1)}$, where Δ is the maximal comparative ratio of points distances. We also prove that there's no constant competitive ratio algorithm for this case.

Key words: Operational Research; Facility Location Problem; Online Median; Competitive Ratio