存在利率和交易费用的单方向局内外汇兑换问题的竞争分析

朱志军， 徐寅峰， 姜锦虎
(西安交通大学 管理学院，陕西 西安 710049)

摘 要：外汇兑换是现实中的一个典型局内决策问题。在 El-Yaniv 等人研究的基础上，考虑到现实的实际情况，本文将利率和交易费用引入到该问题当中，扩展了 El-Yaniv 提出的基于风险的兑换策略（Threat-based Policy），使得运用该兑换策略，无论汇率在 $[m, M]$ 中如何变动，局内人得到的收益总是在对应局外问题最优收益一定比例 r 之内。

关键词：单方向外汇兑换；局内算法；竞争分析
中图分类号：F830.73 **文献标识码**：A **文章编号**：1003-5192(2003)04-0051-05

Competitive Analysis of One-way Trading with Interest and Transaction Cost

ZHU Zhi-jun, XU Yin-feng, JIANG Jin-hu
(*The School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

Abstract: Foreign currency trading is a typical online decision problem in our real life. Based on the research results of El-Yaniv, Threat-based Policy is extended by introducing market interest and commission cost. No matter what is the trading ratio between m and M, the online player is promised to get a return about certain proportion r to the offline optimal return by committing the trading policy proposed in the paper.

Key words: one-way tradin; on-line algorithm; competitive analysis

1 引言

随着贸易全球化和经济的一体化进程的加快，国际资本在世界范围内的流动越来越频繁。在以美国为首的世界经济普遍低迷的情况下，我国的经济还能一支独秀，保持着年增长 7%～8% 左右。在外商眼中我国已经成为国际资本角逐本土以外的最大战场。据国家统计年鉴，1999 年我国进出口总额 26896.3 亿人民币，实际利用外资 526.59 亿美元。虽然我国现在还没有实行资本项目的自由兑换，但不难看出随着国际贸易和国际资本流动的进一步发展，外汇兑换将成为一个重要的话题，因此对外汇兑换的研究显得极为迫切。

局内问题是 80 年代后期兴起的一个热门研究方向，它是研究不完全信息下的决策问题[1]。因为现实中的很多经济和金融问题有很强的动态特征，我们不可能知道和预测未来确切信息[2]。因此在这种情况下我们往往无法对问题做出最优决策，而只能尽力给出问题的满意决策[3]。而竞争算法就是这样一种决策，该决策在各种条件下给出的决策结果都在对应最优决策的一定范围之内[4]。局内问题和竞争算法在计算机科学方面已经有了很多的研究成果并得到了广泛的应用。由于金融和管理问题中未来信息的缺乏和不确定性，如今它们也越来越多的受到众多局内问题和竞争算法研究学者的广泛注意。而本文研究的外汇兑换问题就是这方面的一个典型例子。

外汇兑换[5,6]，我们可以用下面的例子简单来理解：假设一个交易者希望将他的一部分现金财产 w_0（如美元）兑换成另外一些资产或货币（如日元）。因为外汇的波动是无规律，且未来信息不可预测，所以在每天一个新的汇率出现时，局内人必须决定是继续等待一个更好的汇率还是进行兑换

收稿日期：2002-11-22
基金项目：国家自然科学基金委员会优秀创新群体资助项目（70121001）；国家自然科学基金资助项目（70028102）

且兑换多少。虽然随着电子信息技术和媒体业的飞速发展,我们获取每天汇率信息的成本可以忽略不计。但如何进行最优的外汇兑换仍然是一个棘手的难题。从某种方面来看,单方向外汇兑换问题是局内价格搜索问题的一个具体应用,不同的是在单方向外汇兑换问题中我们可以将财产细分为无数份,然后根据汇率逐个进行兑换。

本文所考虑的单方向外汇兑换问题中的算法可以直接应用到日常生活中的许多经济和金融问题当中。例如,考虑一个基金经理需要调整他价值 w_0 部分的证券投资组合,进入或退出某个资本市场;再例如在准备移民到其他国家时,将本国货币资产兑换成他国或美元等通用货币和资产时也可以应用该算法。

2 单方向外汇兑换模型

在这部分中,我们首先介绍文献[1,7]中提到的单方向外汇兑换模型。令 M 为最大可能的汇价, m 为最低可能的汇价, Φ 为 M 和 m 的比值及 n 为交易期数。根据已知条件的不同,单方向外汇兑换问题可以分为 4 个不同的类型:

类型 1: M, m,和 n 已知;

类型 2: M, m 已知 n 未知;

类型 3: Φ 和 n 已知;

类型 4: Φ 已知 n 未知。

本文我们只考虑第 1 种类型,部分符号定义如下:

T_i 为交易期 i。p_i 为交易期 T_i 内的兑换比率,我们用日元对美元的数目表示。数目越大,日元相对美元越便宜。$P=\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 为兑换比率序列。$\underline{P}=\{\underline{p}_1, \underline{p}_2, \cdots, \underline{p}_n\}$ 为最坏情况下的兑换比率序列。$U_j=\max_{i<j} p_i$ 为在阶段 T_j 之前(包括阶段 T_j)出现过的最大兑换比率。D_i^A 为阶段 T_i 后策略 A 剩余的美元数目。所有策略开始都有 $D_0^A=d_0$ 数目的美元。$s_i^A=D_{i-1}^A-D_i^A$ 为策略 A 在 T_i 阶段兑换的美元数目。$y_i^A=\sum_{j=1}^{i} s_j^A p_j$ 为在阶段 T_i 后策略 A 拥有的日元数目。$y_n^A=\sum_{j=1}^{i} s_j^A p_j$ 为在所有交易结束时策略 A 拥有的日元数目。

如果局内投资者开始拥有 d_0 数目的美元,则整个投资过程需要遵循以下三个原则:

(1)一共有 n 个阶段, T_i, $i=1,2,\cdots n$。(2)在每个阶段 T_i,会有一个新的汇率 p_i,局内投资者需要决定兑换多少美元。在阶段 T_i,投资者可以兑换 s_i 数目美元得到 $s_i p_i$ 数目的日元,且 $s_i \in [0, d_0-\sum_{j=1}^{i-1} s_j]$。(3)如果第 T_n 阶段还有剩余美元,则在此阶段必须全部兑换成日元。

显然,最优的局外策略是在最大的汇率时将所有的美元兑换成日元。如果我们令 $U_j=\max_{i<j} p_i$,则最大的汇率为 U_n 且局内投资者的竞争比为

$$r=\max_{E=\{e_1,\cdots,e_n\}} \frac{d_0 U_n}{\sum_{i=1}^{n} s_i p_i}$$

问题的目标就是设计一个策略使得竞争比 r 最小。数学模型可以表示为

$$\min_{A\in\sum} \max_{E=\{e_1,\cdots,e_n\}} \frac{d_0 U_n}{\sum_{i=1}^{n} s_i p_i}$$

$$\text{s.t.} \quad \forall i, s_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = d_0$$

$\sum$ 为局内算法集合

本文中,为了简便起见我们令 $d_0=1$,且省略上标 A, A 表示本文研究的基于风险的兑换策略。El-Yaniv 证明了基于风险的兑换策略(Threat-based policy)是此问题最优的局内策略。且有如下定理

定理 1 基于风险的兑换策略是局内单方向外汇兑换问题的最优策略,其中竞争比 r 为下列方程式

$$r=n\cdot\left(1-\left(\frac{m(r-1)}{M-m}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

的唯一解。

3 存在市场利率的单方向外汇兑换问题

外汇兑换问题[5]没有考虑市场利率,忽视了货币的时间价值。在日常生活中,我们知道如果存在市场利率,货币的价值也会随着利率的波动而波动。事实上,在许多情况下,影响金融决策的往往不是货币的简单数目,而是资金的时间价值。如果投资方案的资金利润率低于时间价值,则该方案经济效益状况不佳;反之,如果投资方案的资金利润

率高于时间价值,则该方案经济效益良好,方案可行。因此我们将市场利率引入到外汇兑换模型中,考虑市场上美元和日元的利率均为 t 的情况(如果美元和日元的利率不相同,通过一些变换下面的兑换策略仍然适用)。首先令 y_i 表示在时期 T_i 我们拥有日元的现值,我们修改后的基于风险的兑换策略如下:

规则 1 只有当前的汇率用复利折算的现值为迄今最大的时候才考虑将部分美元兑换成美元。

规则 2 每次将美元兑换成日元时,我们只兑换最少数目的美元,使得即使以后的汇率一直保持最低时我们仍能保证我们的竞争比为 r。

规则 1 说明一旦交易商在某一时期进行了交易(兑换),以后只有在更高的汇价现值(经过复利计算后)出现时才会进行下一次汇兑,在这期间中一样或更低的汇价将会被忽略。因此 OPT 和以上基于风险的汇兑策略只会在更高汇价出现时交易。考虑最坏情形,我们可以假设汇价序列首先包含一个长度为 k 的连续增长序列($k < n$),然后是长度为 $n - k$ 的最低汇价。令 r 为我们的目标竞争比且假设 $p_1' > rm$(否则在 T_1 阶段交易不会发生),其中 p_1'表示 p_1 在利率为 t 情况下的现值。具体如下

$$rm < p_1' < p_2' < \cdots < p_k' < M$$

$$p_{k+1}' = p_{k+2}' = \cdots = p_n' = m$$

根据对基于风险的汇兑策略和最坏汇价序列的分析,有如下引理成立:

引理 1 如果 ALG 是竞争比为 r 的基于风险的兑换策略,则对任何 $i > 1$ 和利率 t 每期美元的兑换数目为

$$s_i = \frac{(p_i\beta_i - p_{i-1}\beta_{i-1})}{r(p_i\beta_i - m\beta_n)}$$

其中 $\beta_i = 1/(1+t)^i$, n是阶段数目。

证明 根据规则 2,我们在每次只兑换最少数目的美元满足当汇率一直保持最低时我们仍能保证我们的竞争比为 r,则有如下等式

$$\frac{p_i\beta_i}{y_i + mD_i\beta_n} = r \tag{1}$$

$$y_i + D_i m\beta_n = \frac{p_i\beta_i}{r} \tag{2}$$

$$y_i = y_{i-1} + s_i p_i\beta_i \tag{3}$$

$$D_i = D_{i-1} - s_i \tag{4}$$

结合(1)～(4)式,我们不难得到

$$s_1 = \frac{1}{r}\cdot\frac{p_1\beta_1 - \beta_n rm}{p_1\beta_1 - \beta_n m} \tag{5}$$

和对任何 $i > 1$ 有

$$s_i = \frac{(p_i\beta_i - p_{i-1}\beta_{i-1})}{r(p_i\beta_i - m\beta_n)} \tag{6}$$

证毕。

对任意 k,每天的美元兑换数目满足 $\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$。将(5),(6)两式带入我们可以得到

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{(p_1\beta_1 - \beta_n rm)}{p_1\beta_1 - \beta_n m} + \sum_{i=2}^{k}\frac{1}{r}\cdot\frac{p_i\beta_i - p_{i-1}\beta_{i-1}}{p_i\beta_i - m\beta_n} = 1$$

进而有

$$r = \frac{(p_1\beta_1 - \beta_n rm)}{p_1\beta_1 - \beta_n m} + \sum_{i=2}^{k}\frac{(p_i\beta_i - \beta_{i-1}p_{i-1})}{p_1\beta_1 - \beta_n m}$$

$$\Rightarrow r = 1 + \frac{(p_1\beta_1 - \beta_n m)}{p_1\beta_1}\sum_{i=2}^{k}\frac{(p_i\beta_i - \beta_{i-1}p_{i-1})}{p_i\beta_i - \beta_n m}$$

重新组合,我们可以得到如下等式

$$r = r^{(k)}(p_1, p_2, \cdots, p_k)$$

$$= 1 + \frac{(p_1\beta_1 - \beta_n m)}{p_1\beta_1}\sum_{i=2}^{k}\frac{(p_i\beta_i - \beta_{i-1}p_{i-1})}{p_i\beta_i - \beta_n m} \tag{7}$$

为了求出竞争比 r 的最大可能值,我们需要找到(7)式后半部分的最大值。如果令 $\frac{\partial r}{\partial p_i} = 0$,我们得到

$$\frac{\partial r}{\partial p_i} = \frac{\beta_i(p_i\beta_i - m\beta_n) - \beta_i(p_{i-1}\beta_{i-1} - m\beta_n)}{(p_i\beta_i - m\beta_n)^2} - \frac{\beta_i}{p_{i+1}\beta_{i+1} - m\beta_n} = 0$$

$$\Leftrightarrow (p_{i-1}\beta_{i-1} - m\beta_n)(p_{i+1}\beta_{i+1} - m\beta_n) = (p_i\beta_i - m\beta_n)^2$$

因此如果外汇序列符合

$$(p_{i-1}\beta_{i-1} - m\beta_n)(p_{i+1}\beta_{i+1} - m\beta_n) = (p_i\beta_i - m\beta_n)^2$$

则可以得到最大可能的 r。为了简单起见,我们令 $x_i = (p_i\beta_i - m\beta_n)$,则有

$$\sum_{i=2}^{k}\frac{(p_i\beta_i - \beta_{i-1}p_{i-1})}{p_i\beta_i - \beta_n m} = \sum_{i=2}^{k}\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}$$

$$= k - 1 - \sum_{i=2}^{k}\frac{x_{i-1}}{x_i} \tag{8}$$

当 $\sum_{i=2}^{k}\frac{x_{i-1}}{x_i}$ 取最小值时,$r^{(k)}(p_1, p_2, \cdots, p_k)$

可以得到它的最大可能值。根据算术平均值不小于几何平均值及

$$\prod_{i=2}\frac{x_{i-1}}{x_i}=\frac{p_1\beta_1-\beta_n m}{p_k\beta_k-\beta_n m}$$

当 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\cdots=\frac{x_{k-1}}{x_k}=\left(\frac{p_1\beta_1-\beta_n m}{p_k\beta_k-\beta_n m}\right)^{1/k-1}$ 时，$\sum_{i=2}^{k}\frac{x_{i-1}}{x_i}$ 取最小值且我们可以得到

$$\sum_{i=2}^{k}\frac{(p_i\beta_i-\beta_{i-1}p_{i-1})}{p_i\beta_i-\beta_n m}=\sum_{i=2}^{k}\frac{x_i-x_{i-1}}{x_i}$$

$$=k-1-\sum_{i=2}^{k}\frac{x_{i-1}}{x_i}=(k-1)\left(1-\left(\frac{x_1}{x_k}\right)^{1/k-1}\right)$$

$$=(k-1)\left(1-\left(\frac{p_1\beta_1-m\beta_n}{p_k\beta_k-m\beta_n}\right)^{1/k-1}\right)$$

因为此时竞争比只和 p_1 和 p_k 有关，$r=r^{(k)}(p_1,p_2,\cdots,p_k)$ 可写为 $r=r^{(k)}(p_1,p_k)$。不难看出 $r^{(k)}(p_1,p_k)$ 随着 p_k 的增大而增大，因为汇率最大为 M，我们继续可以得到

$$r^{(k)}(p_1)=1+\frac{p_1\beta_1-\beta_n m}{p_1\beta_1}(k-1)\cdot\left(1-\left(\frac{p_1\beta_1-m\beta_n}{M\beta_k-m\beta_n}\right)^{1/k-1}\right)\qquad(9)$$

引理 2　$\max_{p_1}(r^{(k)}(p_1))$ 存在，令 p^* 是在 $[m,M]$ 区间使得 $r^{(k)}(p^*)=\max_{p_1}(r^{(k)}(p_1))$ 成立的 p_1，则其满足 $p^*=t^*/\beta_1$, and $r^{(k)}(t^*)=\frac{kt^*}{(k-1)m+t^*}$。

证明　令 $t=p_1\beta_1$，且作如下替换

$$u=(t-m\beta_n)^{\frac{1}{k-1}},\ v=(M\beta_k-m\beta_n)^{\frac{1}{k-1}}$$

我们让 $r^{(k)}(p_1)$ 对 t 求导，可以得到

$$\frac{d\,r^k(p_1)}{d\,t}=-\frac{u^k-m\beta_n(k-1)v+km\beta_n u}{t^2v}\qquad(10)$$

考虑等式(10)的分子，对任意正数 v 和 $k>1$，方程

$$u^k-m\beta_n(k-1)v+km\beta_n u=0\qquad(11)$$

有唯一的正数解 u^*。换句话说存在 $t^*=(u^*)^{k-1}+m\beta_n$。因为 $d^2r^{(k)}(p_1)/dt^2$ 的值为负，所以 $r^{(k)}(t^*)$ 是最大值。从等式(11)我们可以得到

$$\frac{u^*}{v}=\frac{m\beta_n(k-1)}{(u^*)^{k-1}+m\beta_n k}$$

如果我们把 u^* 和 v 替代回去，有

$$\left(\frac{t^*-m\beta_n}{M\beta_k-m\beta_n}\right)^{1/k-1}=\frac{u^*}{v}=\frac{m\beta_n(k-1)}{t^*+m\beta_n(k-1)}\qquad(12)$$

将(12)式带入(9)式，我们可以证明引理 2，即

$$r^k(t^*)=1+\frac{t^*-m\beta_n}{t^*}(k-1)\left(1-\left(\frac{t^*-m\beta_n}{M\beta^k-m\beta^n}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right)$$

$$=1+\frac{t^*-m\beta_n}{t^*}(k-1)\left(1-\frac{m\beta_n(k-1)}{t^*+m\beta_n(k-1)}\right)$$

$$=1+\frac{(t^*-m\beta_n)(k-1)}{t^*+m\beta_n(k-1)}$$

$$=\frac{kt^*}{t^*+m\beta_n(k-1)}$$

证毕。

通过以上的一些结论，我们可以得出针对基于风险的兑换策略的 k 天的最坏汇率序列。如果用 $\underline{P}=\underline{p}_1,\underline{p}_2,\cdots,\underline{p}_k$ 表示这个序列，根据引理 2 有 $\underline{p}_1=p^*$。根据以上讨论有 $\underline{p}_k=M$ 和对于任意 i，$1<i<k$ 有

$$\frac{p_i-p_{i-1}}{p_i-m\beta^n}=1-\left(\frac{p_1\beta_1-\beta_n m}{p_k\beta_k-\beta_n m}\right)^{1/k-1}$$

于是

$$\underline{p}_i=\underline{p}_{i-1}\left(\left(\frac{p_1\beta_1-\beta_n m}{M\beta_k-\beta_n m}\right)^{1/k-1}\right)+m\beta_n\left(1-\left(\frac{p_1\beta_1-\beta_n m}{M\beta_k-\beta_n m}\right)^{1/k-1}\right)$$

对于任意 $1\le i\le k$，令 s_i 表示汇率序列是 $\underline{P}$ 情况下，基于风险的兑换策略每天兑换的美元数目，根据以上分析，我们可以得到下面的引理。

引理 3　对任意 $1\le i\le k$，$s_i=1/k$。

引理 4　$r^{(k)}(m,M)$ 是 $r=k\cdot\left(1-\left(\frac{m\beta_n(r-1)}{M\beta_k-m\beta_n}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$ 的唯一解。

推论 1　$r^{(n)}(m,M)$ 是 $r=n\cdot\left(1-\left(\frac{m\beta_n(r-1)}{M\beta_n-m\beta_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=n\cdot\left(1-\left(\frac{m(r-1)}{M-m}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$ 的唯一解。

定理 2　如果 m,M 和 n 事先给定，则 $r^{(n)}(m,M)$ 是给定期间 n 存在市场利率 t 的单方向外汇兑换问题的最优竞争比。

4　存在交易费用的单方向外汇兑换问题

El-Yaniv 等对不存在交易费用的单方向兑换问题做了详尽的分析。然而在现实中，交易费用的存在使得频繁的进行兑换变得无利可图。在这部分中，我们将原有模型进行扩展，将交易费用(commission cost)引入到原有模型中。在每次交易

中,我们假设证券金融机构将会收取一定比例的交易费用。这样假设是符合客观现实的,如在金融交易中,上海股票、基金及深圳股票均按实际成交金额的3.5‰向券商支付;深圳基金按实际成交金额的3‰收取佣金。假设每次交易中需要收取固定比例$\alpha<1$的交易费用,为了简单起见,我们令$c=1-\alpha$。同样根据对基于风险的外汇兑换模型的分析,在引入交易费用后应该有如下引理成立:

引理5 如果算法ALG是竞争比为r的基于风险的外汇兑换策略,则对任意$i>1$有$s_i=\frac{(p_i-p_{i-1})}{r(p_i-m)}$成立。

证明 根据基于风险的外汇兑换模型的规则2,在每次进行兑换时,我们兑换最少的美元以保证即使在汇率保持在最低时我们也能达到竞争比r,相应的有如下不等式

$$\frac{p_ic}{y_i+mD_ic}=r \tag{13}$$

$$y_i+D_imc=\frac{p_ic}{r} \tag{14}$$

$$y_i=y_{i-1}+s_ip_ic \tag{15}$$

$$D_i=D_{i-1}-s_i \tag{16}$$

结合(13)~(16)式,我们不难得到

$s_1=\frac{1}{r}\cdot\frac{p_1-rm}{p_1-m}$且对于任意$i>1$有,$s_i=\frac{1}{r}\cdot\frac{p_i-p_{i-1}}{p_i-m}$。证毕。

通过比较文献[5]中结果不难发现,虽然加入了固定比例的交易费用,但并没有改变模型的适用性。结合文献[5],有如下一些结果成立:

推论2 $r^{(n)}(m,M)$是$r=n\cdot\left(1-\left(\frac{m(r-1)}{M-m}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$的唯一解。

定理3 如果m,M和n事先给定,则$r^{(n)}(m,M)$是给定期间n存在交易费用c的单方向外汇兑换问题的最优竞争比。

5 小结

随着经济贸易的全球化,各国之间的商贸往来也越来越频繁。企业之间进行进出口业务时,不同货币之间的往来结算也变得越来越重要。同时人口的流动日益频繁,出国旅游、移居他国人们往往需要进行外汇兑换,外汇兑换也变得越来越重要。El-Yaniv等就是将外汇之间的兑换抽象成了一个局内兑换模型,提出了基于风险的兑换策略。而本文对该模型做了进一步扩展,根据实际情况引入了市场利率和交易费用。通过本文以上的分析我们不难看出,虽然加入了市场利率和交易费用,模型和竞争比结果有了一些变化,但基于风险的兑换策略仍然是该局内问题的最优兑换策略。另外我们发现加入固定比例的交易费用后,竞争比并没有变化。但如果每次交易增加的不是固定比例而是固定数目的交易费用,我们可以预想竞争比结果将会变大。这是因为基于风险的兑换策略由于过于担心风险而增加了交易的次数,如果每次加入固定交易费用,这将导致因为交易费用的增加而使得兑换收益减少。

对于本文所研究的外汇兑换问题还有许多进一步值得关注的问题和方向,例如交易人可以双方向兑换时[7](即可以将美元兑换成日元,也可以在某个时刻将日元兑换成美元),我们该如何设计汇兑策略?基于风险的兑换策略还是不是最优策略?另外,在本文中参数(m,M,n)是给定的,但如果对这些参数的估计并不可靠,如M可能估计过高或过低,这种错误的估计对兑换策略的影响也是一个值得关注的课题。

参 考 文 献:

[1] Manasse M S, McGeoch L A, Sleator D D. Competitive algorithms for server problems[J]. Journal of Algorithms, 1990,11:208-230.

[2] David S B, Borodin A. A new measure for the study of the on-line algorithm[J]. Algorithmica, 1994,11:73-91.

[3] Fiat A, Woeginger G. Online algorithms: the state of art[M]. Springer LNCS 1442, 1998. 178-195.

[4] Al-Binali S. A risk-reward framework for the competitive analysis of financial games[J]. Algorithmica, 1999,25:99-115.

[5] El-Yaniv R, Fiat A, Karp R M, et al.. Optimal search and one-way trading online algorithms[J]. Algorithmica, 2001,30:101-139.

[6] El-Yaniv R, Fiat A, Karp R M, et al.. Competitive analysis of financial games[C]. Proc. 33rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1992. 327-333.

[7] Dannoura E, Sakurai K. An improvement on El-Yaniv-Fiat-Karp-Trupin's money-making bi-directional trading strategy[J]. Information Processing Letter, 1998,66:27-33.