在线单方向外汇兑换问题与风险补偿收益模型①

徐寅峰[1,2] 朱志军[1]

(1. 西安交通大学管理学院；2. 机械制造工程国家重点实验室)

【摘要】 外汇兑换是现实中的一个典型在线决策问题。在前人研究的基础上，本文针对风险补偿收益模型，考虑预期一旦汇率高过 η，则在余下的阶段汇率一直不会低于 η 情况下的最优在线兑换策略。文章分析给出了新的在线交易策略和最优的约束竞争比，而后的数值结果表明在新的预期下，最优约束竞争比平均改善程度在70%左右，且发现参数 η 是影响最优约束竞争比的最主要因素。

关键词 单方向外汇兑换 在线算法 竞争分析 预期

中图分类号 F830 **文献标识码** A

前 言

随着贸易全球化和经济一体化进程的加快，国际资本在世界范围内的流动越来越频繁。据国家统计年鉴，2003年我国外贸进出口总值达4743亿美元，比1998年增长31.5%，创新中国成立以来最高水平，也创了改革开放以来进出口总值和增长速度两个新高。其中出口2492亿美元，增长27.8%；进口2251亿美元，增长35.8%，全年实现贸易顺差241亿美元。虽然我国现在还没有实行资本项目的自由兑换，但不难看出随着国际贸易和国际资本流动的进一步发展，外汇兑换将成为一个重要的话题，因此对外汇兑换的研究显得极为迫切。在本文中我们就主要运用在线问题和竞争策略来研究外汇兑换问题。

在线问题是20世纪80年代后期兴起的一个热门研究方向，它是研究不完全信息下的决策问题（Manasse等，1990）。因为现实中的很多经济和金融问题有很强的动态特征，我们不可能知道和预测未来确切信息。因此在这种情况下我们往往无法对问题做出最优决策，而只能尽力给出问题的满意决策（El-Yaniv等，1999）。竞争算法就是这样一种决策，该决策在各种条件下给出的决策结果都在对应最优决策的一定范围之内（朱志军等，2003a；朱志军等，2003b）。在线问题和竞争算法在计算机科学方面已经有了很多研究成果并得到了广泛的应用。由于金融和管理问题中未来信息的缺乏和不确定

① 此研究受到国家自然科学基金委员会优秀创新群体项目(70121001)和国家自然科学基金(10371094)资助。

性，如今它们也越来越多地受到众多在线问题和竞争算法研究学者的广泛注意。而本文研究的外汇兑换问题就是这方面的一个典型例子。

外汇兑换（Borodin 等，1998），我们可以用下面的例子简单来理解：假设一个交易者希望将他的一部分现金财产 w_0（如美元）兑换成另外一些资产或货币（如日元）。因为外汇的波动无规律，且未来信息不可预测，所以在每天一个新的汇率出现时，在线人必须决定是继续等待一个更好的汇率还是进行兑换且兑换多少。El－Yaniv（2001，1992）建立了在线外汇兑换模型，而后提出了基于风险的兑换策略（Threat－based policy），分析了该策略的竞争比结果并证明了该策略是最优的在线兑换策略。朱志军等（2003c）对存在利率和交易费用的单方向外汇兑换问题进行了分析，给出了扩展的基于风险的兑换策略。S.al－Binali（1999）在此基础上，对该问题做了进一步研究。建立了风险－收益补偿模型，依据在线决策者对未来的预期和所能承受的风险来确定出一个在线策略集合，而后根据预期成功后最小的约束竞争比来选择在此模型下的最优在线策略。(朱志军等，2004）对风险－补偿模型下的在线租赁问题做了详细分析。而本文是在 S.al－Binali 研究的基础上，结合实际情况，考虑预期一旦汇率高过 η，则在余下的阶段汇率一直不会低于 η 情况下的最优在线兑换策略和约束竞争比。

一、竞争比分析与风险收益补偿模型

1. 竞争比分析

在在线问题中，输入总是逐步获知的。对于每个输入，在线算法在不知道后继信息的情况下需要给出输出，也就是说在得到了 t 步输入后，我们需要给出 t 步的输出。因为决策是在不知道整个输入的情况下做出的，因此在线算法往往得不到最优解。考虑一个最小化费用问题 T，输入集合为 I，$ALG[I]$ 是对于给定输入 I 该算法得到的可行输出，即产生的费用记为 $ALG[I]$。对输入 I，在线最优算法是指在事先知道输入 I 的情况下该问题的最优算法，其费用可以表示为 $OPT(I)=\min\limits_{O\in G(I)} C(I,O)$。如果存在与输入 I 无关的常数 α 和 c 满足

$$ALG(I)\leqslant c\cdot OPT(I)+\alpha \tag{1}$$

我们就称在线算法 ALG 是 c－竞争比（或竞争比为 c）。

在金融交易中竞争比分析很受欢迎，一个重要的原因就是不需要构造概率模型。而对于很多的经济金融问题，存在着很强的动态特征，变量之间的关系非常复杂，往往很难构造出一个合适的概率分布。另外竞争比分析是算法绩效的一个相对比值。在很多情况下，金融机构除了最大化他们的效用外，他们更看重他们和竞争对手的业绩比较，如在金融证券中的 Keeping Up with Joneses 函数（Abel，1990）。

虽然竞争比分析在在线问题中得到了广泛的应用，取得了丰硕的研究成果，但其衡量标准本身存在着一些缺陷。如竞争比分析中假定在线决策者对未来信息一无所知，但实际中决策者总是知道部分信息，因此完全忽略这部分信息是一种很大的浪费，这也是竞争比结果不如人意的内在原因。而且竞争比分析是最坏情形分析，因此得到的结果是确定性结果，不存在风险。但在很多问题中，特别是金融管理问题，决策者更希望能够控制风险，为了更好的收益，有时他们宁愿担负一定的风险。正是基于这些原因，S.al－Binali 建立了风险－收益补偿模型，依据在线决策者对未来的预期和所能承受的风险

来确定出一个在线策略集合，而后根据预期成功后最小的约束竞争比来选择在此模型下的最优在线策略。

2．风险收益补偿模型

MacCrimmon 和 Wehrung（1996）给出了一个研究风险的基础模型，在模型中有两种行为：得到确定结果的无风险行为和有可能产生收益或损失的风险行为，且风险行为产生的结果是不确定的。传统的竞争比分析不给投资者选择的权利，他们始终选择无风险的行为来得到最优竞争比。在风险补偿模型中投资者可以在风险和无风险行为进行自由选择，根据预期成功后最大化风险补偿的原则选择此模型下最优的在线算法。

在本文中定义算法 *ALG* 的风险为其竞争比和最优竞争比之间的比值，这个比值反映了算法 *ALG* 对最优算法的最大机会成本。事实上风险补偿模型是竞争比分析的一个扩展。如果在风险补偿模型中我们只能接受风险为 1 的在线算法，那就变成了传统的竞争比分析。

另外一个概念是预期，也就是对未来市场发展的一个预测。预期是所有可能输入的一个子集，它只包含未来可能产生的一部分信息（例如预期在随后的 30 天内股价会增长 \$5），而不对未来输入作概率分布假设。事实上预期在竞争比分析中并不是一个新概念，Borodin 等（1995）介绍换页问题中的邻接图就抓住了需求页位置这一特点，这同样是预期的一个特殊形式；另外 Raghavan（1992）提出的统计对手也是对未来的一种预期，只不过这种预期需要符合我们的统计假设（如对手策略的输入需要符合给定的均值和方差）。

模型的另外一个部分就是补偿函数。我们定义在预期成功时算法的竞争比为算法的约束比率；补偿是最优竞争比和约束比率之间的比值（即衡量在预期成功时算法的改进比率）。

在定义了以上一些变量后，投资者就可以进行灵活的投资方案了。首先投资者给出一个最大的可接受风险水平和预期，而后我们就可以从不超过投资者可接受的风险水平的算法中找出在预期成功后补偿最大的算法。

令 $C_A(I)$ 表示问题 T 在输入 I 情况下的在线算法 A 的花费，离线算法 *OPT* 的花费用 $C_{OPT}(I)$ 表示，于是对于问题 T 算法 A 的竞争比可以表示为 $r_A=\sup\limits_{I\in I}\dfrac{C_{OPT}(I)}{C_A(I)}$，问题 T 的最优竞争比为 $r^*=\inf\limits_{A} r_A$。令 r_A 为算法 A 的竞争比，则我们可以定义算法 A 的风险为 $\dfrac{r_A}{r^*}$。从投资者来看，这个风险比值反映了算法 A 对最优竞争算法的最大机会成本。如果我们令 t 表示投资者最大的风险容忍度（$t\geqslant 1$，t 越大表明投资者越风险偏好），则我们可以用 $I_t=\{A\mid r_A\leqslant tr^*\}$ 表示在投资者风险容忍度 t 内的在线算法集合。

预期是问题输入的一个子集，令预期 $F\in I$。算法 A 在某些约束条件下的竞争比结果称为其约束竞争比，如果令 r'_A 表示在预期成功算法 A 的约束竞争比，则有 $r'_A=\sup\limits_{F\in I}\dfrac{C_{OPT}(F)}{C_A(F)}$。对于算法 A 预期成功时的补偿收益我们定义为 f_A，且 $f_A=r^*/r'_A$。

因此给定问题 T、输入集合 I，预期 $F\in I$ 和风险容忍度 t，最优的风险－容忍算法 $A^*\in I_t$ 为 $f_{A^*}=\sup\limits_{A\in I_t} f_A$。根据对 f_A 的分析不难有 $1\leqslant f_{A^*}\leqslant r^*$。

二、风险收益补偿模型下的在线外汇兑换策略分析

El-Yaniv（1992）建立了最初的外汇兑换模型，考虑已知汇率波动的最大值 M 和最小值 m 及阶段数 n 的在线策略，文章提出了基于风险的兑换策略并分析了该策略的竞争比结果。S.al-Binali（1999）在此基础上，对该问题做了进一步研究。依据在线决策者对未来的预期和所能承受的风险来确定出一个在线策略集合，而后根据预期成功后最小的约束竞争比来选择在此模型下的最优在线策略。文章结合 El-Yaniv 已有的结果，给出了在预期未来存在汇率超过 $m+\Delta$ 情况下的最优约束竞争比和最优的兑换策略。

考虑到实际市场中，在汇率突破某一个价位后，汇率会有一段长时间的上涨或下跌，如股票市场中的反弹底线等。结合这一情况，本文主要考虑如下的预期：一旦汇率高过 η，则在余下的阶段汇率一直不会低于 η。即如果存在 $p_i>\eta$，则对于任意后续汇率 $p_j>\eta$（$i<j<n$）。

根据新的预期，一旦出现 $p_i>\eta$ 时，对于后续的汇率有 $p_j>\eta$（$i<j<n$）。和 Binali 中原问题不同的是此时不必担心未来汇率会跌到最低点，因此在每阶段的交易数量也会发生很大的变化。参考 Binali（1999）可以给出新的交易策略（TS1）：

规则 1 只有当前的汇率为迄今最大的时候才考虑将部分美元兑换成日元。

规则 2 每次将美元兑换成日元时，我们只兑换最少数目的美元，使得即使以后的汇率一直保持可能的最低时我们仍能保证我们的竞争比为 r。

规则 3 当还没有汇率 $p_i>\eta$ 时，根据在线决策者的风险容忍度 t 进行交易，保证即使价格跌至 m 时也能保证竞争比 tr_1^*，其中 r_1^* 表示不存在预期最初问题的最优竞争比。每阶段交易数目为 $s_i=\frac{1}{tr_1^*}\frac{p_i-p_{i-1}}{p_i-m}$，$p_0=tr_1^*m$。

规则 4 假设在 λ 阶段有汇率 $p_\lambda>\eta$，根据问题的假设，而后的汇率都有 $p_j>\eta$（$i<j<n$）。因此此时不需担心汇率会下降到 m，所以在 λ 阶段不需进行任何交易，将节约的美元在更高的汇率上进行兑换。首先重新计算最优竞争比 r_2^*，而后依据新的最优竞争比进行交易。每阶段交易数目为 $s_i=\frac{1}{r_2^*}\frac{p_i-p_{i-1}}{p_i-\eta}$，$p_{\lambda+1}=r_2^*\eta$。

实际上 TS1 策略是一个两阶段兑换策略，在第一阶段，汇率还没有达到预期值 η 时，保证竞争比 tr_1^*，从而尽量节约美元；在第二阶段，当汇率达到或超过预期值 η 时，充分利用先前节约下来的美元在此更高的汇率兑换成日元来保证竞争比为 r_2^*，即使而后汇率一直跌为 η。这样 TS1 就能保证当预期失败时竞争比也不会大于 tr_1^*，而一旦预期成功，相对 TS 将有更多的美元在更高的汇率上进行兑换，获得的收益将高于 TS 策略，于是有 $r_2^*<r_1^*$（后面将具体介绍如何计算 r_2^*）。

1. 计算最坏情形下的汇率序列

规则 5 要求所有的交易必须在更高的汇率上进行，任何相等和较低的汇率都会被忽略。于是离线的 OPT 和 TS1 都只会在汇率达到一个新的最高才会进行交易。要分析 TS1 的最坏情形，我们不妨假定汇率由一个连续 k 期增长的子序列组成，且 $k\leqslant n$。

定理 1 该 TS1 策略的最坏汇率序列是 $p_i=\begin{cases} m+m\ (tr_1^*-1)\ \alpha_1^i & 1\leqslant i<\lambda \\ P,\ P\in[\eta,\ r_2^*\eta) & i=\lambda \\ \eta+(p_k-\eta)\ \alpha_2^{i-k} & \lambda<i\leqslant n \end{cases}$

其中 $\alpha_1=\ (\dfrac{p_{\lambda-1}-m}{m\ (tr_1^*-1)})^{1/(\lambda-1)}$，$\alpha_2=\ (\dfrac{p_k-\eta}{\eta\ (r_2^*-1)})^{1/(k-\lambda-1)}$。

证明 假定在阶段 λ 时首次出现汇率 $p_\lambda>\eta$，则对于阶段 $1\leqslant i<\lambda$，根据规则 3，根据在线决策者的风险容忍度 t 进行交易，结合 El-Yaniv 等（1992）的分析有 $\dfrac{p_i}{Y_i+mD_i}=tr_1^*$，于是根据

$$Y_i+D_im=\frac{p_i}{tr_1^*}$$

$$Y_i=Y_{i-1}+s_ip_i$$

$$D_i=D_{i-1}-s_i$$

我们可以得到 $s_i=\dfrac{1}{tr_1^*}\dfrac{p_i-p_{i-1}}{p_i-m}$（$2\leqslant i\leqslant\lambda-1$），$s_1=\dfrac{1}{tr_1^*}\dfrac{p_1-tr_1^*m}{p_1-m}$。

假定在阶段 λ 预期成功，有汇率 $p_\lambda\geqslant\eta$，用 r_2^* 表示新的目标竞争比，于是而后的交易数目可以表示为 $s_i=\dfrac{1}{tr_1^*}\dfrac{p_i-p_{i-1}}{p_i-\eta}$（$\lambda+2\leqslant i\leqslant k$），$s_{\lambda+1}=\dfrac{1}{tr_1^*}\dfrac{p_{\lambda+1}-r_2^*\eta}{p_{\lambda+1}-\eta}$。

根据我们的交易规则有 $\sum\limits_{i=1}^{k}s_i=\sum\limits_{i=1}^{\lambda-1}\dfrac{1}{tr_1^*}\dfrac{p_i-p_{i-1}}{p_i-m}+s_{\lambda+1}+\sum\limits_{i=\lambda+2}^{k}\dfrac{1}{r_2^*}\dfrac{p_i-p_{i-1}}{p_i-\eta}$。因为在阶段 λ 没有进行任何交易，所以 $s_\lambda=0$。于是上式和 p_λ 无关，为了得到 $\sum\limits_{i=1}^{k}s_i$ 的最大值和不违背最初的基于风险的策略（只有在更高的汇率上才进行交易），当 $p_\lambda\in[\eta,\ r_2^*\eta)$ 时，都不会进行交易。令 $x_i=p_i-m$，$y_i=p_i-\eta$，则上式可以写为：

$$\sum_{i=1}^{k}s_i=\sum_{i=1}^{\lambda}\frac{1}{tr_1^*}(1-\frac{x_{i-1}}{x_i})+s_{\lambda+1}+\sum_{i=\lambda+2}^{n}\frac{1}{r_2^*}(1-\frac{y_{i-1}}{y_i})$$

$$=\frac{\lambda-1}{tr_1^*}+\frac{k-\lambda}{r_2^*}-\frac{1}{tr_1^*}\sum_{i=1}^{\lambda-1}\frac{x_{i-1}}{x_i}-\frac{1}{r_2^*}\sum_{i=\lambda+1}^{k}\frac{y_{i-1}}{y_i}$$

其中 $y_\lambda=r_2^*\eta-\eta$。不难看出 $\prod\limits_{i=1}^{\lambda-1}\dfrac{x_{i-1}}{x_i}=\dfrac{m(tr_1^*-1)}{p_{\lambda-1}-m}$，$\prod\limits_{i=\lambda+1}^{k}\dfrac{y_{i-1}}{y_i}=\dfrac{\eta(r_2^*-1)}{y_k}=\dfrac{\eta(r_2^*-1)}{p_k-\eta}$。所以为了求得 $\max\sum\limits_{i=1}^{k}s_i$，根据几何平均数不大于算术平均数定理，只有当连乘的每一项均相等时，$\sum\limits_{i=1}^{k}s_i$ 取得最大值，即 $1\leqslant i\leqslant\lambda-1$，$\dfrac{x_{i-2}}{x_{i-1}}=\dfrac{x_{i-1}}{x_i}$ and $\lambda+1\leqslant i\leqslant k-1$，$\dfrac{y_{i-1}}{y_i}=\dfrac{y_i}{y_{i+1}}$。于是不难得到 $1\leqslant i\leqslant\lambda-1$，$\dfrac{p_{i-2}-m}{p_{i-1}-m}=\dfrac{p_{i-1}-m}{p_i-m}=\dfrac{1}{\alpha_1}$，且 $\dfrac{1}{\alpha_1}=(\dfrac{mtr_1^*-m}{p_{\lambda-1}-m})^{1/(\lambda-1)}$，因此对于 $1\leqslant i\leqslant\lambda$，$p_i=m+m\ (tr_1^*-1)\ \alpha_1^i$。$\lambda+1\leqslant i\leqslant k-1$，$\dfrac{y_{i-1}}{y_i}=\dfrac{y_i}{y_{i+1}}=\dfrac{1}{\alpha_2}$，且 $\dfrac{1}{\alpha_2}=\ (\dfrac{\eta r_2^*-\eta}{p_k-\eta})^{1/(k-\lambda-1)}$，于是对于 $\lambda+1\leqslant i\leqslant k$，$p_i=\eta+\ (p_k-$

η） α_2^{i-k}。

2. 计算最优约束竞争比

因为只有连续 k 阶段是向上增长，因此最优的算法总是将所有的美元在 k 阶段进行兑换。于是令在线策略 k 阶段兑换数目之和为 1。有

$$\sum_{i=1}^{k} s_i = \sum_{i=1}^{\lambda-1} \frac{1}{tr_1^*} \frac{p_i - p_{i-1}}{p_i - m} + s_{\lambda+1} + \sum_{i=\lambda+2}^{k} \frac{1}{r_2^*} \frac{p_i - p_{i-1}}{p_i - \eta} = 1, \text{具体有}$$

$$\sum_{i=1}^{k} s_i = \sum_{i=1}^{\lambda-1} \frac{1}{tr_1^*} \frac{p_i - p_{i-1}}{p_i - m} + s_{\lambda+1} + \sum_{i=\lambda+2}^{k} \frac{1}{r_2^*} \frac{p_i - p_{i-1}}{p_i - \eta} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda-1}{tr_1^*} + \frac{k-\lambda}{r_2^*} - \frac{1}{tr_1^*} \sum_{i=1}^{\lambda-1} \frac{p_{i-1} - m}{p_i - m} - \frac{1}{r_2^*} \sum_{i=\lambda+1}^{k} \frac{p_{i-1} - \eta}{p_i - \eta} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda-1}{tr_1^*} + \frac{k-\lambda}{r_2^*} - \frac{\lambda-1}{tr_1^*} \frac{1}{\alpha_1} - \frac{k-\lambda}{r_2^*} \frac{1}{\alpha_2} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{(k-\lambda)(1-\frac{1}{\alpha_2})}{r_2^*} = 1 - (1-\frac{1}{\alpha_1}) \frac{\lambda-1}{tr_1^*} \Rightarrow r_2^* = \frac{tr_1^*(k-\lambda)(1-\frac{1}{\alpha_2})}{tr_1^* - (1-\frac{1}{\alpha_1})(\lambda-1)}$$

为了得到最大可能的 r_2^*，我们可以进一步分析 r_2^* 的性质。不难看出，r_2^* 随着 k 的增加而增大。令 $k=n$，于是 r_2^* 可以重新写为 $r_2^* = \dfrac{tr_1^*\ (n-\lambda)\ (1-\frac{1}{\alpha_2})}{tr_1^* -\ (1-\frac{1}{\alpha_1})\ (\lambda-1)}$。又因为 r_2^* 随着 $\frac{1}{\alpha_2}$ 的减少而增加，即为 $\frac{1}{\alpha_2}$ 的减函数，而 $\frac{1}{\alpha_2}$ 又是 p_k 的减函数，因此 r_2^* 是 p_k 的增函数，p_k 取最大值 M 时，r_2^* 取得最大值，且此时 $\frac{1}{\alpha_2} = (\frac{\eta r_2^* - \eta}{M-\eta})^{1/(n-\lambda)}$。同样 r_2^* 随着 $\frac{1}{\alpha_1}$ 的减少而增加，即为 $\frac{1}{\alpha_1}$ 的减少而增加，即为 $\frac{1}{\alpha_1}$ 的减函数，而 $\frac{1}{\alpha_1}$ 又是 $p_{\lambda-1}$ 的减函数，因此 r_2^* 是 $p_{\lambda-1}$ 的增函数，$p_{\lambda-1}$ 取最大值 $\eta-\xi$（$\xi \to 0$）时，r_2^* 取得最大值。因为 $p_{\lambda-1}$ 可以无限接近 η，因此为了表示方便，令 $p_{\lambda-1}=\eta$，且此时 $\frac{1}{\alpha_1} = (\frac{mtr_1^* - m}{\eta - m})^{1/\lambda}$，于是根据 r_2^*、$\frac{1}{\alpha_1}$ 和 $\frac{1}{\alpha_2}$ 我们就能惟一确定最坏情形下每阶段 p_i。

为了得到最优的约束竞争比结果有两种方法：一是，对上面的式子对 λ 求偏导令其等于 0，而后得出使得 r_2^* 最大的 λ 值，带入后求出最优的约束竞争比；二是，对所有可能 λ 求出上式的结果，然后进行比较得出最优的约束竞争比。

3. 数值结果

为了清楚地说明风险容忍度，预期和约束竞争比之间的关系，我们给出了一些数值结果来探求在预期发生变化后约束竞争比的变化，我们重点对 Binali（1999）中的数值例子做了相应的对照分析，得出了当预期发生变化，即如果存在 $p_i > \eta$，则对于任意后续汇率 $p_j > \eta$（$i<j<n$）下的约束竞争比结果见表 1。

表 1　　新预期下的约束竞争比结果（$m=100$，$M=120$，$n=30$，$r_1^*=1.0674$）

t	η	λ	r_2（Binali 给出的最优约束竞争比）	r_2^*	$1-\frac{r_2^*-1}{r_2-1}$
1.01	110	8	1.06423	1.032553	49.3%
1.01	115	21	1.05785	1.015294	73.6%
1.05	115	13	1.03964	1.015504	60.9%
1.01	117	25	1.05529	1.009428	82.9%
1.05	117	20	1.03002	1.009250	69.2%

考虑到竞争比的下限为 1，因此最大可改进的范围是 r_2-1，因此我们以 r_2^*-1 和 r_2-1 之间的比值作为我们衡量竞争比改善的指标，从表 1 中可以发现，大多数情况下，加强一些预期，即运用本文提到的预期，相比 Binali（1999）平均改善幅度都在 70% 左右。

为了进一步反映出各参数变化对约束竞争比的影响，我们以 $t=1.01$，$\eta=110$，$\lambda=8$ 为基准，变化不同参数来分析约束竞争比的变化。具体来说其他不变，当 t 从 1.01 变化到 1.05，约束竞争比从 1.03255 变化为 1.03091，减少了约 5%；当其他不变，λ 从 8 变化到 20，约束竞争比从 1.03255 变化为 1.03161，减少了约 5%；当其他不变，η 从 110 变化到 115，约束竞争比从 1.03255 变化为 1.01659，减少了约 49%。从中我们不难发现，η 是影响约束竞争比的最主要因素（见表 2）。

表 2　　不同参数的变化对竞争比的影响

t	η	λ	r_2^*
1.01	110	8	1.03255
1.05	110	8	1.03091
1.01	110	20	1.03161
1.01	115	8	1.01659

三、结　　论

随着经济贸易的全球化，各国之间的商贸往来也越来越频繁。企业之间进行进出口业务时，不同货币之间的往来结算也变得越来越重要。同时人口的流动日益频繁，人们出国旅游、移居他国往往需要进行外汇兑换，外汇兑换也变得越来越重要。El－Yaniv 给出了在线外汇兑换问题的基本模型和基于风险的兑换策略，朱志军等（2003）引入市场利率和交易费用，给出了扩展的基于风险的兑换策略，S.al－Binali 从另一种思路出发，建立了风险补偿模型，依据在线决策者对未来的预期和所能承受的风险确定出一个在线策略集合，根据预期成功后最小的约束竞争比来选择在此模型下的最优在线策略。本文在前人研究的基础上，考虑新的预期（即一旦出现 $p_i>\eta$ 时，对于后续的汇率有 $p_j>\eta$（$i<j<n$）），给出了此预期下的最优在线兑换策略和最优约束竞争比结果，并分析了参数的不同变化对约束竞争比结果的影响。数值结果表明在新的预期下，最优的

约束竞争比能有较大幅度的改善，平均改善幅度都在70%左右，且发现 η 是影响约束竞争比的最主要因素。

对于本文所研究的外汇兑换问题还有许多进一步值得关注的问题和方向，例如交易人可以双方向兑换时（MacCrimmon 和 Wehrung，1986）（即可以将美元兑换成日元，也可以在某个时刻将日元兑换成美元），我们该如何设计汇兑策略？基于风险的兑换策略还是不是最优策略？另外，现实中的固定比例的交易费用对兑换策略的影响也是一个值得关注的课题。

参考文献

[1] M.S.Manasse, L.A.McGeoch, and D.D.Sleator, Competitive algorithms for server problems [J], *Journal of Algorithms*, 1990, 11, 208～230.

[2] R.El－Yaniv, R.Kaniel, N.Linial, Competitive Optimal On－line Leasing [J], *Algorithmica* 25: 116～140, 1999.

[3] 朱志军、徐寅峰：《加拿大旅行者问题》，《系统工程理论方法应用》[J]，第12卷第2期，2003年6月，第177～181页。

[4] 朱志军、徐寅峰、刘春草：《局内车辆选线问题和竞争策略分析》，《系统工程学报》[J]，第18卷第4期，2003年8月，第324～330页。

[5] A.Borodin and Ran El－Yaniv. Online computation and competitive analysis [M], *Cambridge University Press*, 1998.

[6] R.El－Yaniv, A.Fiat, R.M.Karp, and G.Turpin, Optimal Search and One－Way Trading Online Algorithms [J], *Algorithmica*, 2001, 30: 101～139.

[7] R.El－Yaniv, A.Fiat, R.M.Karp, and G.Turpin, Competitive analysis of financial games [C], *Proc*. 33rd *Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. 1992, 327～333.

[8]朱志军、徐寅峰、姜锦虎：《存在利率和交易费用的单方向局内外汇兑换问题的竞争分析》[J]，《预测》2003年第4期，第51～55页。

[9] S.al－Binali, A Risk－Reward Framework for the Competitive Analysis of Financial Games [J], *Algorithmica*, 1999, 25: 99～115.

[10] A.Abel. Asset prices under habit formation and catching up with the Joneses [J], *American Economic Review*, May 1990, Vol 80, 43～47.

[11] K.R.MacCrimmon and D.A.Wehrung. Taking Risk: The Management of Uncertainty [M], *The Free Press*, London, U.K., 1986.

[12] A.Borodin, S.Irani, P.Raghavan, and B.Schieber. Competitive paging with locality of reference [J], *Journal of Computer and System Science*, April 1995 Vol 50, No.2, 244～258.

[13] P.Raghavan. A statistical adversary for on－line algorithms [J], *DIMACS Series in discrete Mathematics and Theorectical Computer Science*, 1992, Vol 7, 79～83.

（责任编辑：刘 强）