文章编号:1000-6788(2006)03-0108-04

# 群体思维收敛性定量验证

董玉成[1],徐寅峰[1,2],张桂清[3]
(1. 西安交通大学管理学院,陕西 西安 710049;2. 机械制造系统工程国家重点实验室,陕西 西安 710049;
3. 重庆大学数理学院,重庆 400044)

**摘要**: 本文证明当专家数足够多的时候,加权几何平均综合判断矩阵与加权算术平均综合判断矩阵都依概率收敛到客观排序向量,从而从数学上解释和验证了群体思维具有收敛性,这对钱学森先生提出的综合集成研讨厅理论具有一定的理论价值.

**关键词**: 群体思维;综合集成;收敛性

**中图分类号**: C934;O223 **文献标识码**: A

# OnConvergenceofExpertGroupThought

DONGYu-cheng[1],XUYin-feng[1,2],ZHANGGui-qing[3]
(1. SchoolofManagement,Xi'anJiaotongUniversity,Xi'an710049,China;2. StateKeyLabforManufacturingSystemsEngineering,Xi'an710049,China;3. SchoolofScience,ChongqingUniversity,Chongqing400044,China)

**Abstract**: Groupdecisionmakingisaoneofthemosteffectivemethodstoresolvecomplexdecisionproblems.In thispaper,itwasprovedthatboththeweightedgeometricmeancomplexjudgementandtheweightedarithmetical meancomplexjudgementwillconvergeinprobabilityatimpersonalpriorityvectoriftheperturbationfactorsin judgementsthatexpertsgivenisstochastic.Thisresultisofimportancetogroupdecisionmaking.

**Keywords**: groupthought;opinionssynthesis;convergence

## 1 引言

钱学森等先生提出专家研讨厅理论[1],采用综合集成的方法,把专家、决策者的意见综合进去,形成共识.但是众多专家意见形成的群体思维是否具有收敛性,也就是群体思维能否达成共识是一个很值得研究的问题.近10年群体思维收敛性研究多为定性分析[2~4],少定量研究.

一般而言,专家的意见有三种表达形式[5]:正互反判断矩阵、模糊互补判断矩阵、效用值.其中以T.L. Saaty教授提出的正互反判断矩阵理论上最为成熟[6],对正互反判断矩阵集成进行群决策是最近国内外研究较多的问题[7-11],本文也采用正互反判断矩阵作为表示专家意见的偏好方式.加权算术平均与加权几何平均是最常见的两种专家意见集成方法,本文证明当专家数足够多的时候,这两种集成方法都依概率收敛到客观排序向量,从而验证了群体思维具有收敛性,这对钱学森先生提出的综合集成研讨厅理论具有一定的理论价值.

## 2 几个定义

为了叙述方便给出下面定义[12~14]

**定义1** 设有一决策准则 $I$,支配有 $n\geq 2$ 个子准则,现有 $m\geq 2$ 个专家进行评判,$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$(其中 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$)为各专家的权重,则记 $I(n,m,\lambda)$ 为一个群体决策.

收稿日期:2005-03-28
资助项目:国家自然科学基金项目(70525004,70121001)
作者简介:董玉成(1979-),男,湖北人,博士研究生,研究方向:群体决策,E-mail:dyc108@sina.com.

**定义 2**　设 $M_{R_n^+}$ 为正互反矩阵的集合,在群体决策 $I(n, m, \lambda)$ 中,定义 $A^c = (a_{ij}^c)_{n\times n} \in M_{R_n^+}$ 为第 $c$ 个专家的判断矩阵,设 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ 为客观排序向量,定义矩阵 $W = (w_{ij})_{n\times n} = \left(\frac{w_i}{w_j}\right)$ 为客观判断矩阵.

我们可以把 $A^c$ 看成 $W$ 被扰动后的矩阵,即

$$a_{ij}^c = \frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij}^c, \text{其中 } \varepsilon_{ij}^c > 0, \varepsilon_{ji}^c = \frac{1}{\varepsilon_{ij}^c}.$$

从而 $\varepsilon_{ij}^c = a_{ij}^c \frac{w_j}{w_i}$,它是衡量 $a_{ij}^c$ 对客观判断矩阵对应项偏离程度的一个指标. 当 $\varepsilon_{ij}^c = 1$ 时,则判断项 $a_{ij}^c$ 和 $w_{ij}$ 完全相容,当 $\varepsilon_{ij}^c$ 偏离 1 越远,则 $a_{ij}^c$ 与 $w_{ij}$ 偏离越远. 这种把 $A^c$ 看成是 $W$ 被扰动后矩阵的观点是和 Saaty 的 1994 年提出的相容性概念类似的[15]和与其在文献[6]中提出的一致性概念有一定的差异. 群体决策中应该采用相容性来讨论意见差异及其相关的群体思维收敛性[13,16].

**定义 3**　设 $A = (a_{ij}) \in M_{R_n^+}$, $B = (b_{ij}) \in M_{R_n^+}$,矩阵 $A$ 和 $B$ 之和为 $C = (c_{ij})$,其"加法"运算定义为

$$A \oplus B = C.$$

其中:

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + b_{ij}, j \geq i, i, j = 1, 2, \cdots, n \\ c_{ji}^{-1}, j < i, i, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}.$$

**定义 4**　令 $\bar{A} = \lambda_1 A_1 \oplus \lambda_2 A_2 \oplus \cdots \oplus \lambda_m A_m$,其中 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,则称 $\bar{A}$ 为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的加权算术平均综合判断矩阵.

**定义 5**　设 $A = (a_{ij}) \in M_{R_n^+}$, $\alpha \in R$,矩阵的指数运算定义为 $A^\alpha = (a_{ij}^\alpha)$.

**定义 6**　设 $A = (a_{ij}) \in M_{R_n^+}$, $B = (b_{ij}) \in M_{R_n^+}$,矩阵 $A$ 和 $B$ 之积为 $C = (c_{ij})$,其"乘法"运算定义为 Hadamard 乘积,即

$$A \cdot B = C.$$

其中:

$$c_{ij} = a_{ij} \times b_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

**定义 7**　令 $\bar{\bar{A}} = A_1^{\lambda_1} \cdot A_2^{\lambda_2} \cdot A_m^{\lambda_m}$,则称 $\bar{\bar{A}}$ 为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的加权几何平均综合判断矩阵.

本文只考虑各专家权重相同的情况,即 $\lambda_i = \frac{1}{m}(i = 1, 2, \cdots, m)$,不同的情况稍作变化即可.

## 3　群体思维收敛性定量验证

### 3.1　加权算术平均

如果认为 $\varepsilon_{ij}^c (i, j = 1, 2, \cdots, n; c = 1, 2, \cdots, m)$ 是对客观判断矩阵对应项 $w_{ij}$ 的一个随机干扰因子,可以认为其关于 $c$ 是独立且 $E(\varepsilon_{ij}^c) = 1$, $D(\varepsilon_{ij}^c) = \delta^2$. 这种把 $\varepsilon_{ij}^c$ 看成某种随机分布思想最早是由 P.deJong 于 1984 年提出的,王莲芬教授在文献[17]中作过介绍,其目的是进行判断矩阵一致性检验,这里借用这种思想来分析群体思维的收敛性.

**引理 1**　$E\left(\sum_{c=1}^{m}\left(\frac{1}{m}\varepsilon_{ij}^c\right)\right) = 1$, $D\left(\sum_{c=1}^{m}\left(\frac{1}{m}\varepsilon_{ij}^c\right)\right) = \frac{\delta^2}{m}$.

**证明**　因为 $\varepsilon_{ij}^c (i, j = 1, 2, \cdots, n; c = 1, 2, \cdots, m)$ 关于 $c$ 是独立的,由期望和方差的定义和性质计算即得引理 1.

**定理 1**　当 $m$ 充分大时,$\bar{A}$ 会依概率收敛到客观判断矩阵 $W$.

**证明**　采用加权算术平均方法可以得到 $\bar{A} = (\overline{a_{ij}}) = \left(\frac{w_i}{w_j}\sum_{c=1}^{m}\left(\frac{1}{m}\varepsilon_{ij}^c\right)\right)_{i<j}$ (这儿只讨论 $\bar{A}$ 的上三角,下

三角可以类似讨论).

当 $m$ 充分大的时,对 $\forall\varepsilon>0$,由切比雪夫不等式.

$$0\le P\left\{\left|\sum_{c=1}^{m}\left(\frac{1}{m}\varepsilon_{ij}^{c}\right)-E\left(\sum_{c=1}^{m}\left(\frac{1}{m}\varepsilon_{ij}^{c}\right)\right)\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{1}{\varepsilon^{2}}D\left(\sum_{c=1}^{m}\left(\frac{1}{m}\varepsilon_{ij}^{c}\right)\right).\tag{1}$$

两边对 $m$ 取极限

$$0\le\lim_{m\to\infty}\left\{\left|\sum_{c=1}^{m}\left(\frac{1}{m}\varepsilon_{ij}^{c}\right)-E\left(\sum_{c=1}^{m}\left(\frac{1}{m}\varepsilon_{ij}^{c}\right)\right)\right|\ge\varepsilon\right\}\le\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{\varepsilon^{2}}D\left(\sum_{c=1}^{m}\left(\frac{1}{m}\varepsilon_{ij}^{c}\right)\right)\right\}.\tag{2}$$

由引理1得:

$$0\le\lim_{m\to\infty}\left\{\left|\sum_{c=1}^{m}\left(\frac{1}{m}\varepsilon_{ij}^{c}\right)-1\right|\ge\varepsilon\right\}\le\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\delta^{2}}{m\times\varepsilon^{2}}\right)=0.\tag{3}$$

所以:

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\left|\sum_{c=1}^{m}\left(\frac{1}{m}\varepsilon_{ij}^{c}\right)-1\right|\ge\varepsilon\right\}=0.\tag{4}$$

因为 $\sum_{c=1}^{m}\left(\frac{1}{m}\varepsilon_{ij}^{c}\right)$ 对任意 $i<j$ 都依概率收敛到1,故 $\bar{A}$ 上三角依概率收敛到 $W$ 上三角.

## 3.2 加权几何平均

同理,如果认为 $Ln(\varepsilon_{ij}^{c})$ $(i,j=1,2,\cdots,n;c=1,2,\cdots,m)$ 是对客观判断矩阵一个随机干扰因子,可以认为他们关于 $c$ 独立且 $E(Ln(\varepsilon_{ij}^{c}))=0$, $D(Ln(\varepsilon_{ij}^{c}))=\delta^{2}$.

**引理2** 当 $m$ 充分大时,近似有 $E\left(\prod_{c=1}^{m}((\varepsilon_{ij}^{c})^{1/m})\right)=e^{\frac{\delta^{2}}{2m}}$, $D\left(\prod_{c=1}^{m}((\varepsilon_{ij}^{c})^{1/m})\right)=e^{\frac{\delta^{2}}{m}}-e^{\frac{\delta^{2}}{2m}}$.

**证明** 因为 $Ln\left(\prod_{c=1}^{m}((\varepsilon_{ij}^{c})^{1/m})\right)=\frac{1}{m}\sum_{c=1}^{m}Ln(\varepsilon_{ij}^{c})$,又因为 $Ln(\varepsilon_{ij}^{c})$ 关于 $c$ 独立且 $E(Ln(\varepsilon_{ij}^{c}))=0$, $D(Ln(\varepsilon_{ij}^{c}))=\delta^{2}$,那么当专家数 $m$ 足够大时,结合中心极限定理则有 $Ln\left(\prod_{c=1}^{m}((\varepsilon_{ij}^{c})^{1/m})\right)$ 近似服从 $N\left(0,\frac{\delta^{2}}{m}\right)$,因而 $\prod_{c=1}^{m}((\varepsilon_{ij}^{c})^{1/m})$ 近似服从对数正态分布,由对数正态分布的期望和方差公式,即得

$$E\left(\prod_{c=1}^{m}((\varepsilon_{ij}^{c})^{1/m})\right)=e^{\frac{\delta^{2}}{2m}},\ D\left(\prod_{c=1}^{m}((\varepsilon_{ij}^{c})^{1/m})\right)=e^{\frac{\delta^{2}}{m}}-e^{\frac{\delta^{2}}{2m}}.$$

**定理2** 当 $m$ 充分大时,$\bar{\bar{A}}$ 会依概率收敛到客观判断矩阵 $W$.

**证明** 加权几何平均算术方法得到 $\bar{\bar{A}}=(\bar{\bar{a}}_{ij})=\left(\frac{w_i}{w_j}\prod_{c=1}^{m}((\varepsilon_{ij}^{c})^{1/m})\right)_{i<j}$ (同样这里只讨论 $\bar{\bar{A}}$ 的上三角,下三角可以类似讨论).

当 $m$ 充分大时, $\forall\varepsilon>0$,结合切比雪夫不等式有:

$$0\le P\left\{\left|\prod_{c=1}^{m}((\varepsilon_{ij}^{c})^{1/m})-E\left(\prod_{c=1}^{m}((\varepsilon_{ij}^{c})^{1/m})\right)\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{1}{\varepsilon^{2}}D\left(\prod_{c=1}^{m}((\varepsilon_{ij}^{c})^{1/m})\right).\tag{5}$$

两边对 $m$ 取极限,由引理2得

$$0\le\lim_{m\to\infty}P\left\{\left|\prod_{c=1}^{m}((\varepsilon_{ij}^{c})^{1/m})-e^{\frac{\delta^{2}}{2m}}\right|\ge\varepsilon\right\}\le\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{\varepsilon^{2}}\left(e^{\frac{\delta^{2}}{m}}-e^{\frac{\delta^{2}}{2m}}\right)\right\}.\tag{6}$$

即:

$$0\le\lim_{m\to\infty}P\left\{\left|\prod_{c=1}^{m}((\varepsilon_{ij}^{c})^{1/m})-1\right|\ge\varepsilon\right\}\le 0.\tag{7}$$

所以:

$$\lim_{m\to\infty}P\left\{\left|\prod_{c=1}^{m}((\varepsilon_{ij}^{c})^{1/m})-1\right|\ge\varepsilon\right\}=0.\tag{8}$$

因为 $\prod_{c=1}^{m}((\varepsilon_{ij}^{c})^{1/m})$ 对任意 $i<j$ 都依概率收敛到1,故 $\bar{\bar{A}}$ 上三角依概率收敛到 $W$ 上三角.

定理 1、定理 2 分别说明随着专家人数的增多,加权算术(几何)平均综合判断矩阵能依概率收敛到客观判断矩阵,证明了采用这两种方法进行群体意见集成都具有收敛性.

## 4　结论

本文得到了下面结论:当专家数足够多的时候,加权几何平均综合判断矩阵与加权算术平均综合判断矩阵都依概率收敛到客观排序向量,从而从数学上解释和验证了群体决策思维具有收敛性,这对钱学森先生提出的综合集成研讨厅理论具有一定的理论价值.

还有如下问题需要继续研究:

1) 本文的研究只考虑了正互反判断矩阵,事实上群体决策往往根据专家的喜好混用不同的偏好关系(模糊互补判断矩阵、效用值,序关系)和标度,在此基础上的群体思维收敛性问题需要进一步研究;

2) 在进行群体决策时,对 $\varepsilon_{ij}$ 的概率分布进行理论讨论和计算仿真,值得进一步深入研究.

3) 如何把本文及文献[11]这种研究群体决策收敛性的数学方法和达成共识的行为科学和心理科学方法[18~20]结合起来,是一个值得进一步深入研究的问题.

值得注意是:研究群体决策思维收敛性的时候应该用相容性[15]来刻画,而不是用一致性[8]来刻画,一致性只能衡量单个专家意见是否自我矛盾,而相容性才能衡量意见差异. 文献[13]作了较详细的说明.

参考文献:

[1] QianXS,YuJY,DaiRW.Anewdisciplineofscience-thestudyofopencomplexgiantsystemanditsmethodology[J]. ChineseJournalofSystemsEngineering&Electronics,1993,4 (2) :2-12.

[2] 顾基发,唐锡晋. 综合集成与知识科学[J]. 系统工程理论与实践,2002,22 (10) :2-7. GuGF,TangXJ.Meta-synthesisandknowledgescience[J].SystemsEngineering-Theory&Practice,2002,22 (10) :2-7.

[3] 顾基发. 意见综合——怎样达成共识[J]. 系统工程学报,2001,16 (5) :340-348. GuGF.Onsynthesizingopinions-howcanwereachconsensus[J].ChineseJournalofSystemsEngineering,2001,16 (5) :340-348.

[4] 王丹力,戴汝为. 专家群体思维收敛的研究[J]. 管理科学学报,2002,5 (2) :1-5. WangDL,DaiRW.Researchonconvergenceofexpertgroupthought[J].JournalofManagementScienceInChina,2002,5 (2) :1-5.

[5] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 清华大学出版社,2004.

[6] SaatyTL.TheAnalyticHierarchyProcess[M].McGraw-Hill,NewYork,1980.

[7] FormanE,PeniwatiK.Aggregatingindividualjudgementsandprioritieswiththeanalytichierarchyprocess[J].EuropeanJournalofOperationalResearch1998,108:165-169.

[8] RamanathanR,GaneshLS.GrouppreferenceaggregationmethodsemployedinAHP:Anevaluationandintrinsicprocessforderivingmembers'weightages[J].EuropeanJournalofOperationalResearch1994,79:249-265.

[9] EscobarMT,AguarónJ,Moreno-JimenezJM.AnoteonAHPgroupconsistencyfortherowgeometricmeanpriorizationprocedure[J].EuropeanJournalofOperationalResearch,2004,153:318-322.

[10] AczélJ,SaatyTL,Proceduresforsynthesizingratiojudgements[J].JournalofMathematicalPsychology,1983,27 (1) :93-102.

[11] 董玉成,陈义华,王双. 基于相容性修正的群组决策排序算法[J]. 系统工程理论与实践,2004,24 (10) :86-91. DongYC,ChenYH,WangS.Algorithmofsovingweightsforgroupdecisionmakingbyimprovingcompatibility[J].SystemsEngineering-Theory&Practice,2004,24 (10) :86-91.

[12] 刘心报. 判断矩阵一致性的凸性[J]. 系统工程理论与实践,1997,17 (4) :87-89. LiuXB.Theconvexityforconsistencyofjudgementmatrix[J].SystemsEngineering-Theory&Practice,1997,17 (4) :87-89.

[13] 董玉成,陈义华. 综合判断矩阵的几个性质[J]. 系统工程理论与实践,2005,25 (2) :62-66. DongYC,ChenYH.Thepropertiesofconsistencyforaggregationofindividualreciprocaljudgmentmatrix[J].SystemsEngineering-Theory&Practice,2005,25 (2) :62-66.

(下转第 123 页)

参考文献:

[1] 张耘. 循环经济与首都可持续发展[J]. 宏观经济研究,2005,4:23.
ZhangYun.RecyclingeconomyandBeijing'ssustainabledevelopment[J].ResearchonMacroEconomy,2005,4:23.

[2] 北京市市政管理委员会. 促进北京可持续发展[J]. 城乡建设,2002,3:4.
BeijingMunicipalManagementCommittee.PromotingthesustainabledevelopmentofBeijing[J].TownConstruction,2002,3:4.

[3] 冯永生. 北京的生态环境与可持续发展[J]. 北京农业职业学院学报,2003,17 (1) :18-21.
FengYongsheng.Beijing'secologicalenvironmentandsustainabledevelopment[J].JournalofBeijingAgriculturalVocationCollege,2003,17 (1) :18-21.

[4] 周月琪. 以"大人口"观统筹北京的可持续发展[M]. 北京规划建设出版社,出版时间,2004,5 (17) .
ZhouYueqi.OverallPlanningofBeijing'sSustainableDevelopmentfromMacroPopulation[M].BeijingCityPlanningandConstructionReview (inChinese) ,2004,5 (17) .

[5] 秦寿康,等. 综合评价原理与应用[M]. 北京:电子工业出版社,2003.78.
QinShoukang,etal.TheoryandApplicationofSyntheticEvaluation[M].PublishingHouseofElectronicsIndustry,2003.78.

[6] 朱乔. 数据包络分析(DEA)方法综述与展望[J]. 系统工程理论方法应用,1994,3 (4) :1-9.
ZhuQiao.Dataenvelopmentanalysis:Areviewandvisionsforfutureresearch[J].SystemsEngineering-TheoryMethodologyandApplications,1994,3 (4) :1-9.

[7] 郑照宁. 县域可持续发展的系统分析[D]. 北京工业大学硕士学位论文,2001,77-78.
ZhengZhaoning.SystemAnalysisofSustainableDevelopmentinCountyArea[D].Master'sPaperofBeijingUniversityofTechnology,2001,77-78.

**附录:文章数据整理自 1995～2004 年《中国统计年鉴》&《北京统计年鉴》(其中:能源消费总量中:电力、热力按等价热值折算标准煤,其他能源品种按其当量热值折算标准煤,环保资金投入因为年鉴没有统一度量,均从北京市环境状况公报上整理)**

(上接第 111 页)

[14] 董玉成,陈义华. 层次分析法(AHP)中的检验[J]. 系统工程理论与实践,2004,24 (7) :105-110.
DongYC,ChenYH.Amethodofcheckingtheconsistencyandcompatibilityoftheanalytichierarchyprocess[J].SystemsEngineering-Theory&Practice,2004,24 (7) :105-110.

[15] Saaty,ThomasL.Aratioscalemetricandthecompatibilityofratioscales:Thepossibilityofarrow'simpossibilitytheorem[J].AppliedMathematicsLetters,1994,7 (6) :51-57.

[16] 王莲芬. 相容性与群组决策[J]. 系统工程理论与实践,2000,20 (2) :92-96.
WangLF.Compatibilityandgroupdecisionmaking[J].SystemsEngineering-Theory&Practice,2000,20 (2) :92-96.

[17] 王莲芬,许树柏. 层次分析法引论[M]. 北京:中国人民大学出版社,1990.

[18] 斯蒂芬.P. 罗宾斯. 管理学(中译本) [M]. 北京:中国人民出版社,1996.

[19] TheConsensusBuildingInstitute.TheConsensusBuildingHandbook[M].SagePublicationsInc,1999.

[20] SchumanS,RichardsonJ.Decisionconferencingforsystemsplanning[J].InformationandManagement,1991,21:147-159.