

文章编号: 1001-4098(2005)05-0106-05

占线决策问题及竞争分析方法*

徐维军¹, 徐寅峰^{1,2}, 卢致杰¹, 徐金红¹

(1 西安交通大学 管理学院, 陕西 西安 710049;

2 机械制造系统工程国家重点实验室, 陕西 西安 710049)

摘 要: 基于近年来理论计算机科学领域的热点研究方向——占线算法与竞争分析理论, 将相关概念引入经济管理决策问题当中, 比较分析处理占线经济管理决策问题的竞争分析方法与传统 Bayesian 优化方法的区别以及后者的缺陷, 构建利用占线算法及其竞争分析方法研究占线经济管理决策问题的理论框架, 指出在进行占线分析时应注意的要点及分析方法, 最后以两个实例加以说明。

关键词: 占线决策问题; 占线算法; 竞争分析; 竞争比

中图分类号: F830 **文献标识码:** A

面对经济日益全球化, 竞争日趋加剧, 科技飞速发展, 以及信息传递的加快, 各种决策越来越呈现出占线特征, 特别是在金融研究领域, 如证券组合投资、外汇兑换及网上拍卖等方面, 存在着很强的动态特征, 在没有获得未来足够信息时必须对当期需求做出决策。传统优化方法在处理这些决策问题时, 通常假设未来输入序列为一随机变量, 服从某种概率分布, 然后寻求平均意义上的最优方案。当最坏情形发生时, 这种概率意义上的最优方案将失去任何意义。更重要的是, 在金融决策分析中, 有时变量之间的关系往往非常复杂, 很难构造出一个合适的概率分布。再者, 传统决策优化方法实质上是一种离线优化方法, 在给定所在输入及假设条件不变的情况下进行事后优化。面对众多的经济管理及金融占线决策问题, 其传统决策分析方法已经显得无能为力, 然而近年来兴起的占线算法却能有效地克服以上这些缺陷使得在金融分析中大受欢迎。占线问题(Online Problem)和竞争策略(Competitive Strategy)的研究始于 1985 年^[1], 20 年来, 在理论计算机科学领域, 占线算法(Online Algorithm)研究取得一系列研究成果, 随着在经济管理领域中越来越多的问题可用占线算法来解决, 该研究方法已经在经济管理的相关领域引起了广泛关注, 并成为了一个非常值得注意的新研究方向。

近年来, 国外研究者在理论计算机科学领域的基础研

究及应用研究方面已经取得了大量成果, 这为占线算法在经济金融领域的应用创造了必要条件, 特别在金融领域, 如外汇兑换、证券组合投资、金融租赁、设备更新、网上拍卖等方面近几年研究文献大量涌现^[2-7]。虽然其理论价值和经验评价有待于进一步考证, 但已表明占线决策及竞争策略分析在金融问题研究中的应用是有效的。这种方法引起了人们的兴趣和产生了非明显性的算法和分析。与国外相比, 国内对此问题的研究则相对滞后, 直到 1991 年, 堵丁柱在《数学的实践与认识》发表了“k 车服务问题与竞争算法”一文^[8], 国内才开始对该占线问题和竞争策略进行研究。本文研究小组曾基于著名的 k-服务器问题提出并较好地利用竞争策略解决了占线 k-出租车问题, 并给出了关于占线 k-出租车问题的一些变形和应用, 如占线 k-卡车调度、占线库存等问题。目前我们的研究主要集中在生产管理中的占线调度问题及占线金融决策问题^[9-15]等。本文给出了在研究经济管理决策问题时, 一般意义上占线决策分析方法及思路。我们建立了分析占线经济管理问题的决策框架图, 并指出了在进行占线分析时应注意的要点及分析方法, 最后以两个实例加以说明。

1 占线决策与竞争比分析

在人们的日常生产经营活动中, 存在着大量的占线决

* 收稿日期: 2004-07-08; 修订日期: 2004-10-17

基金项目: 国家自然科学基金委员会优秀创新群体项目(70121001); 国家自然科学基金资助项目(10371094)

作者简介: 徐维军(1975-), 男, 宁夏固原人, 西安交通大学管理学院博士研究生, 研究方向: 金融工程及占线金融算法; 徐寅峰(1962-), 男, 吉林人, 西安交通大学管理学院教授, 博士生导师, 研究方向: 现代运筹学及理论计算机科学; 卢致杰(1973-), 男, 江西赣州人, 西安交通大学管理学院博士研究生, 研究方向: 工业工程, 计算机科学及电子商务; 徐金红(1967-), 女, 河北栾城人, 西安交通大学管理学院博士研究生, 研究方向: 金融数学及占线金融算法。

策问题, 面对复杂的环境和不可预知的变化, 决策者常常需要做出占线决策。相对于传统的离线决策, 占线决策更强调决策的时效性和决策技巧, 同时它也代表着决策研究领域的一个重要研究方向^[16-17]。

在占线决策问题中, 未来输入总是逐步获知的, 而对于每个当期的输入, 必须在没有后续信息支持的情况下通过占线算法立即给出输出, 在这个过程中, 占线算法的设计是关键, 它必须能够解决在最小化费用(或最大化利润)的要求下, 实现任意输入序列为 $I = i_1, i_2, \dots, i_n$ 的实时决策结果 $O = o_1, o_2, \dots, o_n$ 的输出。本质上, 一个决策问题的占线算法 ALG 是指在 $j+1$ 期输入到来之前, 占线算法在知道 j 时期的输入 i_j 时就给出 j 时期输出 o_j 的实现方法, 其所花费用用 $Cost_{ALG}(I)$ 表示, 对于同一输入 I , 离线算法 OPT 是指在事先知道输入 I 的情况下该问题的最优算法, 其费用表示为 $Cost_{OPT}(I)$ 。如果存在与输入 I 无关的常数 α 和 c 满足

$$Cost_{ALG}(I) \leq c \cdot Cost_{OPT}(I) + \alpha \quad (1)$$

我们就称占线算法 ALG 是 c -竞争比(或竞争比为 c)。如果 $\alpha = 0$, 我们称算法 ALG 是严格的 c -竞争比。符合上式的最小 c 值称为算法 ALG 的竞争比, 也就是说对任意的输入竞争比为 c 的算法均能保证费用不会超过最优费用的 c 倍。类似地, 对于利润最大化的占线决策问题, 相应于(1)式竞争比的定义为

$$Prof_{i_{OPT}}(I) \geq c \cdot Prof_{i_{ALG}}(I) + \alpha \quad (2)$$

其中, $Prof_{i_{OPT}}(I)$ 表示离线算法获得利润, $Prof_{i_{ALG}}(I)$ 表示占线算法获得的利润。我们注意到: 关于占线算法, 最显著的一个特点是始终与其相应的某一基准算法进行比较。在某种一般意义下, 它提供了一种任何两种可比较策略的

性能统一度量方法。这与金融分析中, 金融机构除了关心它们自身的效用外, 它们更看重其与竞争对手的业绩比较特性有着相同之处, 如在金融证券中的 Keeping Up with Joneses 函数^[2]。

从式(1)和式(2)可以看出竞争比实际上是对最坏输入情况的一种情形分析, 为研究方便, 也可以把占线决策问题简化为两人(零和)博弈的情形, 其中一方为占线决策者, 另一方是离线对手。在博弈中占线者首先选择占线算法并告知离线对手, 然后离线对手选择合适的输入。离线对手的收益就是费用比值, 即最优离线费用和占线费用的比值。离线对手的目标就是选择合适的输入使得费用比值尽可能的大, 而占线决策者恰恰相反, 它的目标是选择最优的占线算法使得费用比值尽可能的小。基于一般意义上的两人零和博弈, 我们能够分别对占线策略或离线策略进行随机化, 类似于博弈论中的混和策略, 随机性占线算法是指具有发出需求序列的离线对手对于占线者随机选择的占线策略, 它没有记忆性, 相应的随机竞争比定义为: 在(1)式中, 用 $E[Cost_{ALG}(I)]$ 代替 $Cost_{ALG}(I)$, $E[\cdot]$ 表示占线算法随机选择策略所得输出成本的期望。(文献[18]对于离线对手进行了各种分类, 并讨论了不同离线对手占线算法竞争比大小的不同关系, 本文这里所指的离线对手称为遗忘性对手。)

2 占线策略的研究框架及其要点

传统决策优化方法过多地强调对未来输入进行随机处理的预期, 而占线决策策略对未来则不做任何的假设, 只强调自身算法的设计, 其研究框架如图 1 所示。

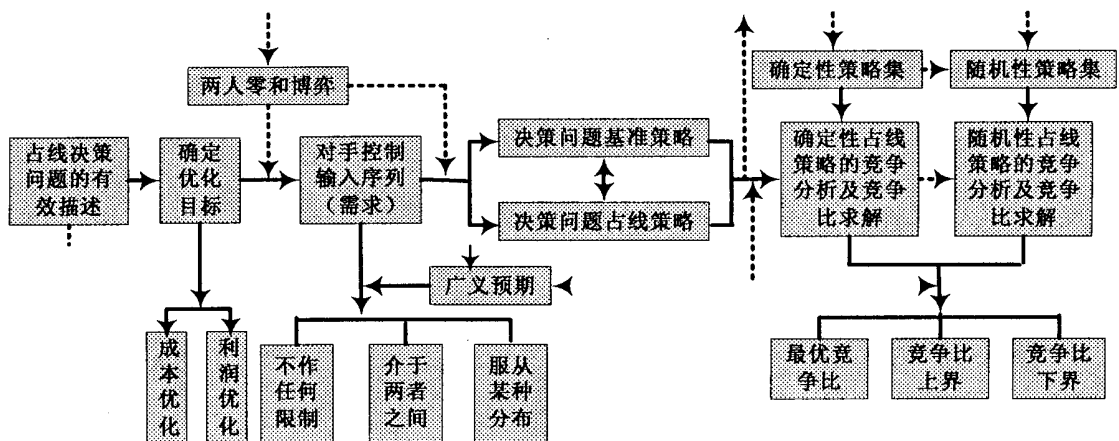


图 1 占线策略研究框架示意图

在实际应用中, 针对具体的问题, 首先对于决策问题有一个总体有效描述; 其次需要确定该决策的优化目标,

明确是成本优化还是利润优化? 然后需要分析影响这个决策问题的本质因素, 即分析影响该决策问题因素的可控

性,获得相应的可控因素集与不可控因素集;然后对这些因素进行必要的数学抽象,并给出相应的数学描述。从博弈论的角度理解占线决策问题,对不可控因素,即为博弈对手所控制的因素,相应占线决策就成为在可控因素假设前提下占线人与不可控因素之间的博弈。

在占线策略分析中,占线决策者的目的就是如何设计出一个好的策略以应对博弈对手可能发出的不可控因素的最坏情形。也就是说,占线人相对博弈对手而言是一个局内人,而博弈对手相对于占线人而言应无所不知,二者进行的是一个动态的两人零和博弈。在这个过程中,占线人可以根据占线决策问题的特性努力试图预期博弈对手所发出需求序列中具有某种信息。如果占线人对不可控因素变量不做任何预期,即为传统的纯竞争分析^[9];如果假定不可控因素变量服从某种分布,即可转化为纯竞争分析方法与传统的 Bayesian 方法相结合进行分析^[12];更一般的情况,由于占线决策问题通常具有某部分可预期的信息,占线者的预期往往介于前两者极端情形(如已知不可控因素变量变化的大致范围以及不可控因素变量具有一定的统计特征等)之间^[19]。

一般而言,对于影响占线决策问题的因素认识得越深刻,则对博弈对手发出的需求序列预期越准确,最后得到的竞争比也会越小。基于博弈对手发出的同一个需求序列,需要分析离线情形下所具有的基准解(或最优解),针对不同的占线问题具有不同的离线算法。在占线决策中,占线人的目标是设计出尽可能好的占线策略,使得在相同需求序列下,占线策略所得成本或收益尽可能地跟踪上离线策略的成本或收益。基于图 1 所示的研究框架,在策略设计时通常优先考虑确定性策略,如果不存在最优的竞争确定性策略(在确定性策略集中),再寻找最优的竞争随机性策略。通常随机性策略是在已知的确定性策略空间集上赋予一定的概率后得到,类似于博弈论中纯策略 Nash 均衡与混合策略 Nash 均衡的关系;竞争比的求解则根据占线决策问题的不同而有着不同的方法,决策者通常希望能够得到决策问题的最优竞争比(如 Ran El-Yaniv 在研究租赁问题时^[5],对占线成本与离线成本的比值利用函数的导数性质求出该比值的最小值,从而得到最优竞争比),如果不能求出最优竞争比,则要给出此占线决策问题的最优竞争比上下界,通常利用不等式的性质进行一系列的放大缩小证明导出竞争比定义(1)或(2)的形式(如 T. M. Cover 在研究证券组合问题时^[3]),对于随机性策略下界估计应用最多的是博弈论中的 Minimax 定理及 Yao 原理的方法技巧^[20](如 Goldberg 等人研究网上电子产品占线拍卖问题时^[7])。

另外,基于图 1 所示的研究框架在进行占线决策问题分析设计时,有如下要点需要特别注意:

第一,竞争比定义(1)中的常数 c 和 α 最多只与刻画

这个决策问题本身的相关参数有关,而与输入序列 I 无关,即相互独立。

第二,在基准策略的选取上,不一定是这个决策问题的全局事后最优策略,因为基准策略能否合理的确定将影响到占线策略的最优竞争性能分析难易程度。如 T. M. Cover 在研究证券组合问题时,选取局部事后基准策略——最优定常再调整策略(Best constant rebalanced portfolio, BCRP),虽然理论上还存在着比 BCRP 策略更优的事后投资方案,但 Cover 证明了根据 BCRP 投资策略所得回报优于证券市场上只投资于最好证券所得回报,优于 Dow Jones 平均,优于价值线指标,也优于一次性买入并持有投资策略,因此只要设计相应的占线策略跟踪 BCRP 基准策略就行。

第三,基准策略和占线策略的最优解不一定需要各自直接求出,关键在于如何通过该问题的数学模型中的相关函数性质及不等式性质进行相应的理论证明找到比值 c 。

第四,确定性占线算法和随机性占线算法是研究一个占线决策问题的两个方面,一般意义上,给出随机性占线算法得到的竞争比一定要优于确定性占线算法所得到的竞争比。另外,有些决策问题有可能不存在确定性占线算法,只能研究随机占线算法,如 Goldberg 等人研究网上电子产品占线拍卖问题,选取基准算法是离线的 K 级拍卖报价策略,他们从理论上严格证明了不存在确定性算法,并给出一些相应的随机性占线拍卖策略。

综上所述,从前面给出的竞争比定义我们可以看出,研究占线算法类似于理论计算科学领域中求解各种 NPC 优化问题的近似算法方法,通常通过以下三个方面加以研究:第一,设计最优的占线策略,并求出该决策问题的最优竞争比 c ;第二,根据管理决策需要,只需设计出满足 c 倍的占线策略,不必找出最优的竞争策略;第三,找出一族最优的占线策略 ALG_δ ,其中最优竞争比 c 必与参数 δ 有关。

3 占线决策问题实例

3.1 确定性占线策略

1992年, Kapr 曾给出了占线租赁问题中确定性占线策略的基本模型和主要结论^[21],令 t 为实际发生的租赁次数,每天租金为 r ,购买该设备价格为 b 。假设 $k = b/r$ 是大于 1 的正整数,当 $k = 1$ 时,显然总是购买;对于离线问题,当 $k < t$ 时购买该设备,否则租用。显然离线问题的最优解为: $Cost_{OPT}(t) = \min\{b, rt\}$,对于占线问题,一般研究这样一大类策略 $A(s)$:即前 s 期一直租用,之后如果继续需要则立即购买, $s = 1, 2, \dots, t$,也即占线策略是当 $t < s$ 时,一直租用;当 $t \geq s$ 时,立即购买该设备,则有

$$Cost_{ALG}(t, s) = \begin{cases} rt, & t < s \\ rt + b, & t \geq s \end{cases} \quad (3)$$

通过简单的推导分析能够得知占线策略 $A(k-1)$ 为最优的占线策略, 即占线人在前 $k-1$ 期租赁, 到第 k 期采取购买策略, 该策略的竞争比为 $2-1/k$ 。我们在此基础上研究了当输入结构具有统计特征时的占线租赁问题, 并得到了一些初步的结论^[12]。

这一看似简单的租赁策略不但在理论计算机科学有着极其重要的理论意义(如手提电脑磁头转速问题等), 而且在经济管理及日常生活当中也有着广泛的应用(如经济管理中金融租赁及设备更新问题等)。例如在等候公共汽车或乘电梯的活动中就存在大量的简单占线决策例子: 在某一城市 C , 某一顾客欲从 M 站到 N 站办事, 有乘坐公共汽车和步行两种到达方式, 乘坐公共汽车需要花费时间 B 分钟, 步行需要花费时间 W 分钟, 不妨假设 $W > B$, 在这个占线决策问题中, 若我们以时间为优化目标, 则顾客等待多长时间后放弃乘坐公共汽车才是一个最优的策略? 在本例中, 步行相当于购买成本, 等待相当于租赁成本, 通过类似分析, 可得到最优的策略是等待 $W-B$ 分钟, 其最优竞争比为 $2-B/W$ 。

3.2 随机性占线策略

相对于确定性占线策略, 随机性占线策略在实际决策中的也被广泛应用, 我们以某一大型公司在采购中的供应商选择为例说明随机性占线策略的设计。假设该公司共有 m 家供货商, 且在每次采购中这 m 家供货商中只有一个厂商的产品是最优的, 令该公司在每次采购中得到最优产品时的效用为 1, 否则为 0, 同时假定只要其中某一个供货商的效用首次达到 n 时采购便结束。从占线角度看, 公司决策者此时面对的是一个对未来信息未知的决策问题, 过去业绩好的供货商在将来未必也做得好, 如何设计出一个好的采购方案使得在整个采购活动结束时所得到的收益尽可能地接近离线时的最优方案? 该决策问题显然没有确定性最优占线采购方案, 因为从两人(零和)博弈的角度看, 对手总是给出最好的产品在公司采购所选择的供货商之外的某个供货商, 使得占线决策者总是得到最差的产品, 从而使得效用达到最坏, 而占线决策的关键是能否设计出一个随机的占线采购方案, 无论离线对手给出任何的输入序列, 都能使得公司的占线采购方案的期望效用尽可能地达到最优, 以下为策略分析:

设每个供货商初始产品质量信誉权重均为 1, 即 $w_i^1 =$

$1, i = 1, 2, \dots, m$ 。在第 1 期采购时, 假设选择每个供货商的概率都相等, 即 $1/m$ 。随后根据每个供货商已往业绩逐期调整选择每个供货商的可能性大小, 即 $w_i^{t+1} = w_i^t / (w_i^t + w_2^t + \dots + w_m^t)$, 也就是说上期中产品最好的供货厂商在下期中选择权重相应增加 $1 + \epsilon$ 倍 ($\epsilon > 0$), 在博弈结束时, 它们总和至少为 $(1 + \epsilon)^n$ (这个值仅是选择最大权重的值)。令 W^t 为 t 时刻的总权重, w_i^t 为 t 时刻第 i 个供货商的权重大小, p^t 为 t 时刻选择最好供货厂商的概率, 即在 t 时刻, 最优的供货商为厂商 i , 则有 $p^t = w_i^t / W^t$ 。同时注意到 p^t 也是采购厂商在 t 时刻的期望效用, 因此 $W^{t+1} = W^t + \epsilon W^t = W^t (1 + \epsilon p^t)$, 则有 $W^{final} = m (1 + \epsilon p^1) (1 + \epsilon p^2) \dots$

$(1 + \epsilon)^n$, 两边取对数得: $\ln m + \sum_{t=1}^n \ln(1 + \epsilon p^t) = n \ln(1 + \epsilon)$ 。根据不等式 $x \ln(1 + x)$, 我们有 $\ln m + \sum_{t=1}^n \epsilon p^t \geq n \ln(1 + \epsilon)$ 。博弈结束时占线决策者的期望效用为 $\sum_{t=1}^n p^t$, 则获得了期望效用下界为 $(n \ln(1 + \epsilon) - \ln m) / \epsilon$, 该下界可简化为 $n - n\epsilon/2 - \ln m / \epsilon$ (由不等式 $\ln(1 + x) \geq x - x^2/2$), 当 $\epsilon = \sqrt{2 \ln m / n}$ 时, 则占线决策者的期望效用至少为 $n - \sqrt{2n \ln m}$ 。显然, 离线采购策略的最优解为 n 。因此, 当 n 充分大时, 竞争比趋向于 1, 如 $n = 1000, m = 50$, 则占线策略的效用值为 911.546, 而运用传统优化方法得到平均意义上的效用值仅为 20。

4 结束语

占线决策是决策领域中的一个重要方面, 运用占线算法研究的很多经济管理问题都具有很强的实践性, 因此我们在设计算法与策略时希望算法具有较强的实用性。无论是基于成本最优的, 还是基于利润最优的占线决策, 其目标都是为了获得最大收益, 其核心在于与离线基准策略的竞争分析, 通过占线算法的设计, 能够获得应对未来无法预知情形的占线策略。理论和实践证明, 在经济管理等相关领域, 这是一套行之有效的办法。

当然在实际的应用中, 理论分析与实际决策之间还存在着一定的差距, 可以试图结合传统 Bayesian 算法分析的优点, 来弥补占线算法在相关决策领域中的应用不足, 如限定对手策略, 或者给在线算法提供更多的信息来改善竞争分析的性能等。

参考文献:

- [1] Sleator D D, Tarjan R E. Amortized efficiency of list update and paging rules[J]. Communications of the ACM, 1985, 28: 202~ 208
- [2] El-Yaniv R, Fiat A, Karp R M, Turpin G. Optimal search and one way trading online algorithms[J]. Algorithmica, 2001, 30: 101~ 139
- [3] Cover T M. Universal portfolio[J]. Mathematics Finance, 1991, 1: 1~ 29
- [4] Azar Y, Bartal Y, Feuerstein E, Fiat A, Leonardi S, Rosen A. On capital investment[J]. Algorithmica, 1999,

- 25: 22~ 36
- [5] El-Yaniv R, Kaniel R, Linial N. Competitive optimal on-line leasing[J]. *Algorithmica*, 1999, 25: 116~ 140
- [6] El-Yaniv R, Karp R M. Nearly optimal competitive on-line replacement policies[J]. *Mathematics of Operations Research*, 1997, 22: 814~ 839.
- [7] Goldberg A, Hartline J, Wright A. Competitive auctions and digital goods [A]. *Proceedings of the 12th Symposium on Discrete Algorithms(SODA '01)[C]*, 2001.
- [8] 堵丁柱. k 车服务问题与竞争算法[J]. *数学的实践与认识*, 1991, 4: 36~ 40
- [9] Xu Y F, Wang K L, Zhu B H. On the k-taxi problem [J]. *Information*, 1999, 2(4).
- [10] Ma W M, You J, Xu Y F, Liu J, Wang K L. On the on-line number of snacks problem [J]. *Journal of Global Optimization*, 2002, 24 (4): 449~ 462
- [11] Ma W M, Xu Y F, Wang K L. On-line k-truck problem and its competitive algorithm [J]. *Journal of Global Optimization*, 2001, 21 (1): 15~ 25
- [12] Xu Y F, Xu W J. Competitive algorithms for on-line leasing problem in probabilistic environments[Z]. *Lecture Notes in Computer Science*, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004, 3174(2): 725~ 730
- [13] 徐寅峰, 王刊良. 占线出租车问题与竞争算法[J]. *西安交通大学学报*, 1997, 1: 56~ 61.
- [14] 徐寅峰, 王刊良, 丁建华. 限制图上的占线出租车调度与竞争算法[J]. *系统工程学报*, 1999, 4: 361~ 365.
- [15] 朱志军, 徐寅峰, 徐维军. 占线租赁问题的风险补偿模型及其竞争分析[J]. *管理科学学报*, 2004, 7(3): 64~ 74
- [16] Borodin A, El-Yaniv R. *On-line computation and competitive analysis*[M]. Cambridge University Press, 1998
- [17] Fiat A, Woeginger G J. *On-line algorithms: the state of art*[M]. Springer, LNCS 1442, 1998
- [18] Ben-David S, Borodin A, Karp R M, Tardos G, Wigderson A. On the power of randomization in online algorithms[J]. *Algorithmica*, 1994, 11: 2~ 14
- [19] Raghavan P. A statistical adversary for on-line algorithms[A]. *DMACS Series in Discrete Mathematics and Theory Computer Science*[C], 1992, 7: 79~ 83
- [20] Yao A C. Probabilistic computations: towards a unified measure of complexity[A]. *Proceedings of the 18th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*[C], 1977: 222~ 227.
- [21] Karp R. On-line algorithms versus off-line algorithms: how much is it worth to know the future? [A]. *Proc IFIP 12th World Computer Congress*[C], 1992, 1: 416~ 429.

Online Decision Problems and Method Research of Competitive Analysis

XU Wei-jun¹, XU Yin-feng^{1,2}, LU Zhi-jie¹, XU Jin-hong¹

(1. School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. The State Key Lab for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an 710049, China)

Abstract Based on the theory of online algorithms and competitive analysis, which is a hot research direction in the domain of theoretical computer science in the recent years, the related concepts and method are introduced into the economic and management field. We point out the difference between the competitive strategy and some traditional methods under online economic problems. Moreover, we propose a research framework for online decision problems of economic and management by competitive analysis method, and point out several noticeable essentials and analytical methods. Finally, we give two practical example of on-line decision problem in order to explain some relevant theory.

Key words: Online Decision Problem; Online Algorithm; Competitive Analysis; Competitive Ratio